УДК 537.312.62

МАГНИТНЫЙ ВИХРЬ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ СВЕРХПРОВОДНИКА

Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков

В рамках теории Гинзбурга – Ландау изучается структура вихревой нити, несущей один квант потока и расположенной на конечном расстоянии от поверхности сверхпроводника. В данной работе найдено распределение магнитного поля и токов в окрестности вихревой нити в лондоновском приближении $\psi = \mathrm{const}$.

1. Структура изолированного вихря, несущего один квант потока $\phi_0 = hc/2e$ и расположенного в толще массивного сверхпроводника второго рода, изучалась во многих работах (см., например, [1 – 3]). Решение системы нелинейных уравнений Гинзбурга – Ландау для векторного потенциала магнитного поля $\mathbf{A}$ и параметра порядка сверхпроводника Ψ определяет поведение магнитного поля $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ и модуля параметра порядка $\psi(r)$ вблизи оси вихря (r – радиальная координата, отсчитываемая от оси вихря, $r = 0$). Было, в частности, показано, что модуль параметра порядка ψ на оси вихря обращается в ноль, а поле на оси вихря $B(0)$ конечно и примерно вдвое превышает значение критического магнитного поля H_{c1}, отвечающего началу проникновения вихрей в массивный сверхпроводник. При этом параметр порядка выходит на постоянное значение $\psi = \mathrm{const}$ при удалении от оси вихря на расстояние $r \sim \xi$, а поле $H(r)$ спадает до нуля на расстояниях $r \sim \lambda$, где ξ – длина когерентности, $\lambda = \kappa\xi$ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля, κ – известный параметр теории Гинзбурга – Ландау.

Представляет также интерес изучить структуру вихря, когда по мере приближения вихревой нити к границе сверхпроводника часть магнитного потока, связанного с вихрем, уходит во внешнее пространство и происходит соответствующая перестройка параметра порядка в окрестности вихревой нити. Этот вопрос приобретает дополнительное значение еще и потому, что он имеет прямое отношение к проблеме нахождения поверхностного потенциального барьера, препятствующего вхождению магнитных вихрей в сверхпроводник второго рода (см. [1 – 5]). Поставленному выше вопросу и посвящена настоящая работа, которая является этапом более общего исследования.

Будем исходить из системы нелинейных уравнений Гинзбурга – Ландау [6, 7] для векторного потенциала $\mathbf{A}$ и комплексного параметра порядка сверхпроводника $\Psi = \psi e^{i\Theta}$ (ψ – модуль и Θ – фаза параметра порядка):

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \ \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{\psi^2}{\lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\nabla\Theta - \mathbf{A}\right), \tag{1}$$

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{\xi^2}(\psi - \psi^3) - \left(\nabla\Theta - \frac{2\pi}{\phi_0}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0. \tag{2}$$

Из условия однозначности параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ следует, что в цилиндрической системе координат, связанной с осью вихря, фазу $\Theta(\mathbf{r})$ можно выбрать в виде $\Theta = \mu\varphi$, где φ – полярный угол точки наблюдения (x, y) (см. рис. 1), а μ – произвольное целое число (называемое топологическим инвариантом или флюксоидом), которое показывает, сколько квантов потока связано с вихревой нитью. (Ниже будем считать $\mu = 1$.) Фаза $\Theta(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию квантования

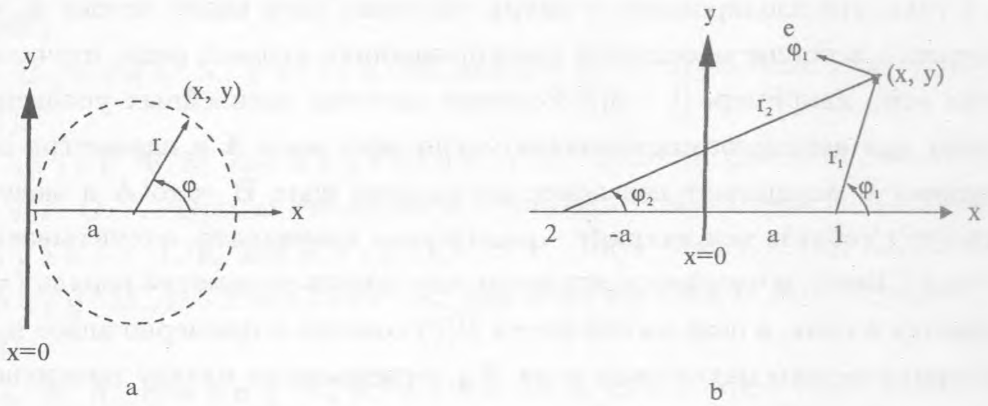


Рис. 1. *Система координат а) для вихря, находящегося на расстоянии a от поверхности, b) для вихря (1) и его изображения (2).*

$$\oint_C \nabla\Theta d\mathbf{l} = 2\pi\mu, \tag{3}$$

где C – произвольный контур, внутри которого находится ось вихря. Ось вихря расположена на расстоянии a от поверхности сверхпроводника ($x = 0$), а магнитное поле вихря направлено вдоль оси $z > 0$, при этом все функции в (1), (2) зависят лишь от двух координат (r, φ). Значения функций в точке $r = 0$, где угол φ не определен, будем понимать как предел при $r \to 0$.

В случае вихря, находящегося далеко от границ сверхпроводника, потенциал $\mathbf{A}$ имеет лишь одну компоненту $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A(r)$ (вследствие цилиндрической симметрии задачи). В нашем случае (рис. 1) векторный потенциал $\mathbf{A}$ имеет две компоненты в плоскости (x, y): $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y$, где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ – орты вдоль осей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; A_x и A_y зависят только от (x, y), или от (r, φ), поскольку

$$x = a + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r^2 = (x-a)^2 + y^2,\ \mathrm{tg}\varphi = y/(x-a). \tag{4}$$

Учитывая выражение (1) для тока, выделим из $\mathbf{A}$ вихревую часть потенциала, записав $\mathbf{A} = \mathbf{V} + (\phi_0/2\pi)\nabla\Theta$, где $\mathbf{V} = -4\pi c^{-1}(\lambda^2/\psi^2)\mathbf{j}$, причем $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{V}$. Уравнение (1) принимает при этом вид

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{V} = -\frac{\psi^2}{\lambda^2}\mathbf{V}. \tag{5}$$

Магнитный поток, связанный с вихрем, есть

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A}d\mathbf{l} = \mu\phi_0 + \oint_C \mathbf{V}d\mathbf{l}, \tag{6}$$

где контур C окружает ось вихря. Если на этом контуре вихревой потенциал $\mathbf{V} = 0$, то $\Phi = \mu\phi_0$, т.е. поток внутри контура C квантован. Если же на контуре C потенциал $\mathbf{V} \neq 0$, то магнитный поток (6) внутри контура не равен целому числу квантов потока, а квантуется лишь фаза (3).

Очевидно, что поток (6) через исчезающе малый контур C должен стремиться к нулю, т.е. вблизи оси вихря (при $r \to 0$) должно выполняться условие $\mu\phi_0 + 2\pi r V_\varphi(r) = 0$, или

$$rV_\varphi(r)|_{r\to 0} = -\mu\phi_0/2\pi. \tag{7}$$

Здесь учтено, что непосредственно вблизи оси вихря (при $r \to 0$) имеется цилиндрическая симметрия и $\mathbf{V} \to \mathbf{e}_\varphi V_\varphi(r)$, где $\mathbf{e}_\varphi$ – единичный орт в направлении роста φ. Заметим, что величина потенциала V_φ (7) на оси вихря не зависит от значения $\psi(0)$, однако величина тока $j = -(c\psi^2/4\pi\lambda^2)V$ на оси вихря существенно зависит от $\psi(0)$.

Будем считать, что магнитное поле вне сверхпроводника (при $x < 0$) отсутствует. При этом поле в сверхпроводнике $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ имеет лишь одну компоненту: $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B(x, y)$, причем на границе

$$B(x, y)|_{x=0} = 0. \tag{8}$$

Заметим, что очевидное требование $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$ автоматически удовлетворяется, поскольку ток $\mathbf{j}$ сам определяется из уравнения (1).

Условие квантования фазы (3) (или эквивалентное условие (7) на оси вихря) и граничное условие (8) фиксируют решение уравнения (5) для потенциала $V(x, y)$ при заданной функции $\psi(x, y)$.

Уравнение (2) для ψ можно записать в виде

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{\xi^2}(\psi - \psi^3) - \left(\frac{2\pi}{\phi_0}\right)^2 V^2\psi = 0. \tag{9}$$

При решении уравнения (10) нужно потребовать выполнения обычного условия $\psi = 1$ в глубине сверхпроводника, а также граничного условия теории Гинзбурга – Ландау [6], справедливого на границе сверхпроводник – вакуум:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{10}$$

(Можно рассматривать и более общие граничные условия, см. [7].) Кроме того, на оси вихря параметр порядка должен обращаться в ноль по закону [2]

$$\psi(r)|_{r\to 0} = pr^{\mu}, \tag{11}$$

где $p = \mathrm{const}$, а μ – число квантов потока, связанных осью вихря (в нашем случае $\mu = 1$). Условия (10), (11) фиксируют решение уравнения (9) для параметра порядка $\psi(x, y)$ при заданной функции $V(x, y)$.

2. Приведем прежде всего решение задачи в приближении теории Лондонов, положив в уравнении (1) $\psi = \mathrm{const}$ и считая $a \to \infty$ (т.е. в случае уединенного вихря вдали от границ [1 – 3]). В цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеем $\nabla\Theta = \mathbf{e}_\varphi\mu/r$, $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A(r)$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B(r)$, где B удовлетворяет уравнению $\mathrm{rotrot}\mathbf{B} = -(\psi^2/\lambda^2)\mathbf{B}$, или

$$\frac{d^2B}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dB}{dr} - \frac{\psi^2}{\lambda^2}B = 0, \tag{12}$$

причем $\mathbf{A} = (\phi_0/2\pi)\nabla\Theta - (\lambda^2/\psi^2)\mathrm{rot}\mathbf{B}$. Решение задачи дается формулами

$$A(r) = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi}{\lambda}\left\{\frac{1}{\rho} - K_1(\rho)\right\},\ B(r) = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi^2}{\lambda^2}K_0(\rho),\ \rho = \psi\frac{r}{\lambda}, \tag{13}$$

K_0 и K_1 – функции Мак-Дональда, экспоненциально убывающие на бесконечности, причем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho K_1(\rho)) = -K_0(\rho),\ B(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA),\ \frac{4\pi}{c}j = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi^3}{\lambda^3}K_1(\rho). \tag{14}$$

Если вихрь расположен в сверхпроводящем полупространстве ($x > 0$) на расстоянии a от поверхности ($x = 0$), то поле $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B(x,y)$ находится методом изображений как сумма двух решений вида (13) для вихря ($\mu\phi_0$) в точке 1 ($x = a$) и его зеркального изображения ($-\mu\phi_0$) в точке 2 ($x = -a$), см. рис. 1:

$$B(x,y) = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi^2}{\lambda^2}K(x,y),\ K(x,y) = K_0(\rho_1) - K_0(\rho_2),\ \rho_1 = \psi\frac{r_1}{\lambda},\ \rho_2 = \psi\frac{r_2}{\lambda}, \tag{15}$$

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \tag{16}$$

$$x = a + r_1\cos\varphi_1 = -a + r_2\cos\varphi_2,\ y = r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2.$$

Поле $B(x,y)$ (15) удовлетворяет граничному условию (8), поскольку при $x = 0$ имеем $\rho_1 = \rho_2$ и $K(x,y) = 0$.

Зная поле $\mathbf{B}$, находим вихревой потенциал $\mathbf{V}$ из уравнения $\mathrm{rot}\mathbf{B} = 4\pi c^{-1}\mathbf{j} = -\psi^2\mathbf{V}/\lambda^2$, $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x V_x + \mathbf{e}_y V_y$:

$$V_x = -\mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y},\ V_y = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial K(x,y)}{\partial x},$$

или, поскольку $dK_0/d\rho = -K_1(\rho)$, $\partial r_i/\partial x = \cos\varphi_i$, $\partial r_i/\partial y = \sin\varphi_i$ ($i = 1,2$),

$$V_x(x,y) = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi}{\lambda}[K_1(\rho_1)\sin\varphi_1 - K_1(\rho_2)\sin\varphi_2],$$

$$V_y(x,y) = -\mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi}{\lambda}[K_1(\rho_1)\cos\varphi_1 - K_1(\rho_2)\cos\varphi_2], \tag{17}$$

$$V^2 = \left(\mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi}{\lambda}\right)^2[K_1^2(\rho_1) + K_1^2(\rho_2) - 2K_1(\rho_1)K_1(\rho_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

При $a \to \infty$ ($\rho_2 \to \infty$ и $K_1(\rho_2) \to 0$) из (17) получаем, в соответствии с (13), потенциал уединенного вихря:

$$\mathbf{V}(\rho_1) = -\mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi}{\lambda}K_1(\rho_1)\mathbf{e}_{\varphi_1},\ \mathbf{e}_{\varphi_1} = -\mathbf{e}_x\sin\varphi_1 + \mathbf{e}_y\cos\varphi_1, \tag{18}$$

где $\mathbf{e}_{\varphi_1}$ – единичный вектор, ортогональный $\mathbf{r}_1$ и направленный в сторону роста φ_1 (см. рис. 1).

Рис. 2 и 3 иллюстрируют поведение амплитуды магнитного поля $B(x,y)$ (15) и потенциала $V(x,y)$ (17) при $y = 0$, т.е. на линии, проходящей через центр вихря перпендикулярно поверхности:

$$B(x,0) = B_0\left[K_0\left(\psi\frac{|x-a|}{\lambda}\right) - K_0\left(\psi\frac{x+a}{\lambda}\right)\right],\ B_0 = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\psi^2}{\lambda^2}, \tag{19}$$

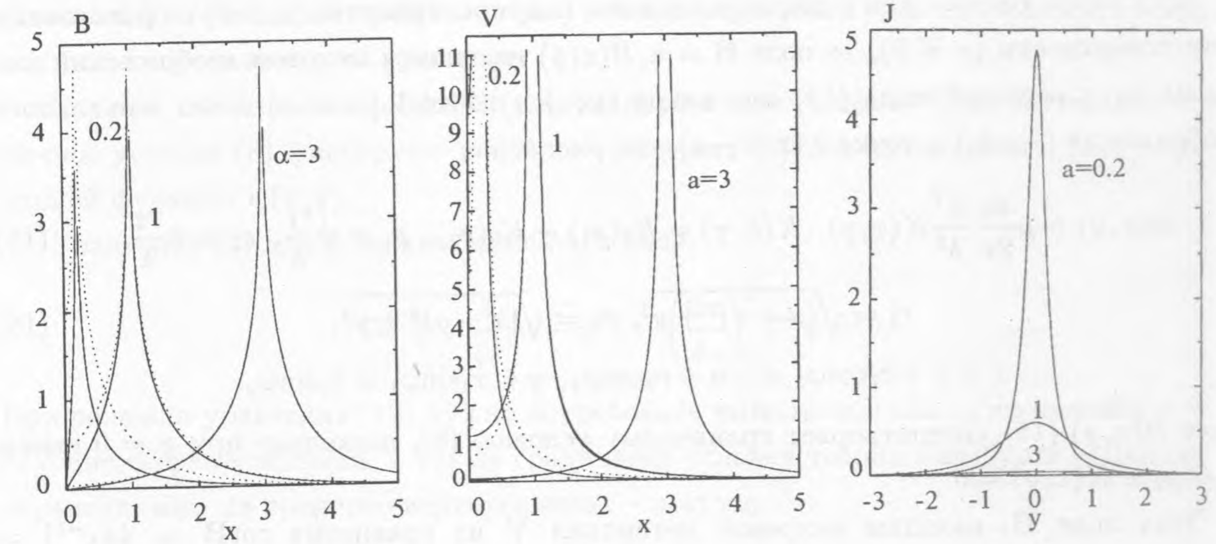


Рис. 2. *Зависимость B(x) при разных расстояниях a от оси вихря до границы. (Значения a указаны на кривых.)*

Рис. 3. *Зависимость потенциала* $V(x,y)|_{y=0}$ *при разных значениях a.*

Рис. 4. *Амплитуда поверхностного тока J(y) (21) при разных a.*

$$V(x,0) = V_0 \left[K_1\left(\psi\frac{|x-a|}{\lambda}\right) - \mathrm{sign}(x-a) K_1\left(\psi\frac{x+a}{\lambda}\right)\right],\ V_0 = \mu\frac{\phi_0}{2\pi}\,\frac{\psi}{\lambda}. \tag{20}$$

Обратим внимание, что значения поля B, потенциала V и тока j на оси вихря расходятся (при $\psi = \mathrm{const}$). (На рис. 2 – 6 значения B и V даны в относительных единицах: B/B_0 и V/V_0).

Хотя всюду на границе сверхпроводника поле $B = 0$ (8), однако по поверхности ($x = 0$) вблизи вихря течет ток $\mathbf{j} \neq 0$. При $x = 0$ имеем (см. рис. 1) $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi_2 = a/\sqrt{a^2+y^2}$ и из (17) находим выражение для поверхностного тока:

$$j_y(x,y)|_{x=0} = -\frac{c\mu\phi_0\psi^3}{4\pi^2\lambda^3} J(y),\ J(y) = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} K_1\left(\frac{\psi\sqrt{a^2+y^2}}{\lambda}\right). \tag{21}$$

На рис. 4 изображена амплитуда поверхностного тока $J(y)$ (токовое пятно) при разных расстояниях a вихря до границы.

На рис. 5 изображены уровни равного поля $B(x,y) = \mathrm{const}$, а на рис. 6 – уровни равного потенциала $V(x,y) = \mathrm{const}$ (или тока $j = \mathrm{const}$) при $a = 0{,}2$ и $a = 1$. Из рис.

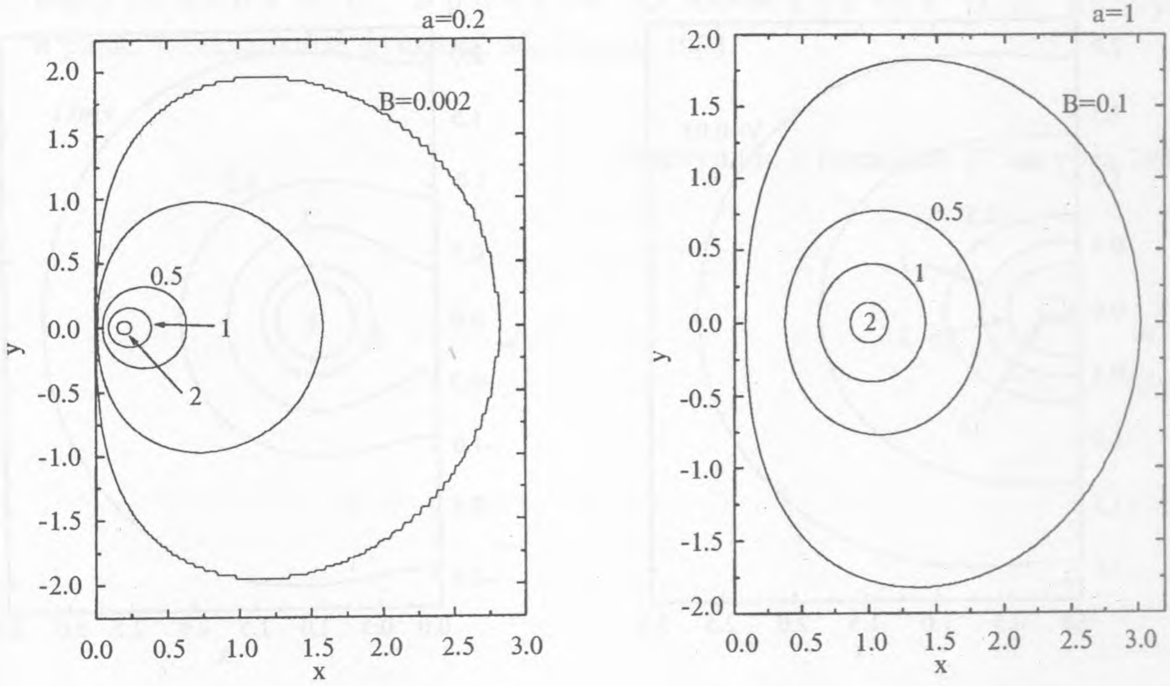


Рис. 5. *Уровни равного поля* $B(x, y) = \mathrm{const}$ *при* $a = 0,2$ *и* $a = 1$.

5, 6 видно, что по мере приближения оси вихря к границе ($x = 0$) распределение поля и потенциала вблизи оси становится δ-образным.

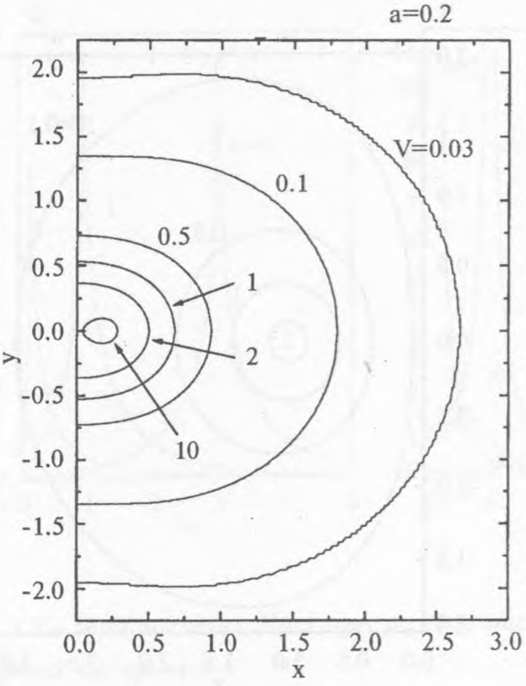
Найдем еще полный магнитный поток Φ в сверхпроводящем полупространстве, связанный с вихрем, находящимся на расстоянии a от границы. Запишем (6) в виде $\Phi = \mu\phi_0(1 - I(a))$. Поскольку на бесконечности ток $\mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{V} = 0$, то контур C в интеграле (6) совпадает с границей ($x = 0$). Используя (17) при $x = 0$, получим

$$I(a) = \frac{1}{\pi}\psi\frac{a}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1\left(\frac{\psi\sqrt{a^2+y^2}}{\lambda}\right)\frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{2}{\pi}\alpha\int\limits_{1}^{\infty} K_1(\alpha z)\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = e^{-\alpha}$$

(см. [8], с. 345), где $\alpha = \psi a/\lambda$. Поэтому заключенный внутри сверхпроводника поток в приближении Лондонов ($\psi = \mathrm{const}$) равен

$$\Phi = \mu\phi_0(1 - e^{-a\psi/\lambda}), \tag{22}$$

причем экспоненциальный член дает ту часть потока вихря, которая диссипирует через границу во внешнее пространство. Экспоненциальную зависимость (22) обычно получают с помощью интуитивных соображений [1, 2]. Заметим, что в последовательной



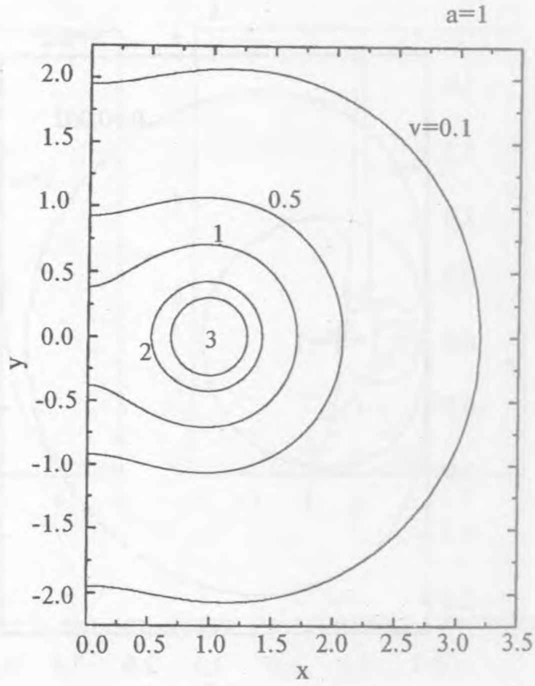


Рис. 6. *Уровни равного потенциала* $V(x, y) = \text{const}$ *при* $a = 0,2$ *и* $a = 1$.

теории, основанной на полной системе уравнений Гинзбурга – Ландау (1), (2), эта зависимость будет иной.

Данная работа поддержана грантом РФФИ N 97-02-17545.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Де-Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов, М., Мир, 1971.

[2] Тинкхэм М. Введение в сверхпроводимость, М., Атомиздат, 1980.

[3] Абрикосов А. А. Основы теории металлов, М., Наука, 1987.

[4] Bean C. P., Livingston J. D. Phys. Rev. Lett., **12**, 14 (1964).

[5] Арутюнян Р. М., Гинзбург В. Л., Жарков Г. Ф. ЖЭТФ, **111**, 2175 (1997).

[6] Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).

[7] Андрюшин Е. А., Гинзбург В. Л., Силин А. П. УФН, **163**, 105 (1993).

[8] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983.

Поступила в редакцию 27 августа 1997 г.