УДК 539.12.01

УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В. К. Мальцев

Рассмотрено общее решение уравнения $R_i^k + \Lambda\delta_i^k = 0$ с 3-пространством I типа Бьянки; это решение при больших временах близко к де-ситтеровскому, при малых временах близко к казнеровскому и обладает соответствующей сингулярностью. Модель де Ситтера является частным случаем этого решения. Она оказывается неустойчивой и при любых малых возмущениях неизбежно приводит к казнеровской особенности.

1. Инфляционный сценарий с начальной де-ситтеровской стадией является в настоящее время общепринятым. В этом сценарии для инфляционной де-ситтеровской фазы очень ранней Вселенной впервые находит свое решение целый ряд нерешенных ранее проблем [1]. Возникает, однако, вопрос об устойчивости этой модели по отношению к анизотропным возмущениям. Этот вопрос рассмотрен в разделе 2 данной статьи, где построено общее решение уравнений $R_i^k + \Lambda\delta_i^k = 0$ с 3-пространством I типа Бьянки. Это решение при больших временах близко к де-ситтеровскому, а при малых временах близко к казнеровскому и обладает соответствующей особенностью. Модель де Ситтера является частным случаем этого решения при определенном выборе постоянных интегрирования (в наших обозначениях – при $B = 0$) и оказывается неустойчивой, т.к. любое, сколь угодно малое $B \neq 0$ приводит к решению с физической сингулярностью. Единственным исключением, соответствующим плоскому 4-пространству решения Казнера, является решение, также имеющее меру нуль. Таким образом, нарушение условий теоремы Пенроуза в случае вакуумоподобного тензора энергии-импульса не приводит к устойчивому несингулярному решению.

Этот результат не вызывает удивления. Еще в пионерной работе Пенроуза по проблеме сингулярности [2] было отмечено, что единственный способ устранения сингулярности заключается в модификации уравнений Эйнштейна и/или введении отрицательной плотности энергии материи (что может оказаться эквивалентным). В параграфе 3 рассмотрена предложенная М. А. Марковым модификация уравнений Эйнштейна [3, 4] (см. также недавний обзор [5]), основанная на предположении об асимптотической свободе гравитационных взаимодействий и нарушающая положительную определенность правой части уравнений Эйнштейна. Формально в данном подходе асимптотическая свобода учитывается подстановкой в теорию Эйнштейна $G(\rho) = G_0(1 - \rho^n/\rho_0^n)$ вместо постоянной Ньютона G_0 (здесь ρ – плотность материи, ρ_0 – некоторый параметр)[1]. Используемые в рамках этого подхода решения также обладают сферической симметрией, и вопрос о возможности возникновения в такой теории решений казнеровского типа был до последнего времени неясен [5]. Анализ, проведенный в разделе 3 нашей статьи, показывает, что анизотропные решения в данной теории не успевают развиться до сингулярности – отскок наступает раньше (за счет анизотропии картина отскока, конечно, усложняется). Таким образом, обсуждаемые в данной теории (называемые самим автором "игрушечными") модели хотя и обладают мерой нуль, но использование их оказывается оправданным в силу их устойчивости – общее решение ведет себя качественно так же, как и "игрушечное". Иными словами, в данной теории нарушение условий теоремы Пенроуза оказалось достаточным для получения устойчивых несингулярных решений.

Предложенная М. А. Марковым модификация уравнений Эйнштейна касается их правой части. Ранее нами была рассмотрена теория с высшими производными в левой части (за счет добавки члена βR^2 в эйнштейновский лагранжиан) и были получены устойчивые несингулярные решения [7]. Хорошо известно, что уравнения теории с R^2 могут быть в некотором вспомогательном пространстве (с метрикой, не эквивалентной исходной) записаны в виде системы обычных уравнений Эйнштейна и уравнения "скалярного поля". Поэтому подчеркнем, что наше рассмотрение ведется в исходной метрике. Наличие высших производных в левой части уравнений оказывается эквивалентным появлению добавочной отрицательной плотности энергии материи, что и приводит к отскоку. Заметим, что несмотря на различие исходных предпосылок, наш

[1]Заметим также, что в последнем сообщении [6] М. А. Марков предложил подстановку $G(\rho) = G_0(1 - \alpha\rho/\rho_0)$ при $\alpha > 1$.

подход близок к подходу М. А. Маркова не только по результату (устойчивый отскок), но и по форме уравнений. Как показано в [7], высшие производные из левой части могут быть "переброшены" в правую часть в виде некоторой функции плотности материи, так что $\rho \to \rho[1 - 36\pi\beta G_0\rho + O(\beta^2)]$, аналогично подходу М. А. Маркова. Подробный анализ этих решений будет дан в другом месте.

2. Общее решение уравнений $R_{ik} = 0$ с 3-пространством I типа Бьянки хорошо известно: это метрика Казнера. Рассмотрим общее решение уравнений

$$R_i^k + \Lambda\delta_i^k = 0 \tag{1}$$

с 3-пространством I типа Бьянки (частным решением является хорошо известная модель де Ситтера). Метрику возьмем в виде

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}(t)dx^\alpha dx^\beta.$$

В явном виде уравнение (1) записывается так [8]

$$\frac{d}{dt}\kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}\kappa_\alpha^\beta\kappa_\beta^\alpha = 2\Lambda, \ \frac{d}{dt}(\sqrt{\gamma}\kappa_\alpha^\beta) = 2\Lambda\delta_\alpha^\beta\sqrt{\gamma}, \tag{2}$$

где $\kappa_{\alpha\beta} \equiv \frac{d}{dt}\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma = det\|\gamma_{\alpha\beta}\|$, индексы перемещаются при помощи $\gamma_{\alpha\beta}$; обозначим $\sqrt{\gamma} \equiv X$, тогда из (2) следует, что $\ddot{X} = 3\Lambda X$.

Сначала рассмотрим случай $\Lambda > 0$ и положим

$$X = Ae^{kt}(1 - B^2e^{-2kt}),$$

где A, B = const, $k = \sqrt{3\Lambda}$. В дальнейшем положим $A = 1$, как и все остальные постоянные интегрирования, которые будут возникать как множители, устранимые преобразованием масштаба. Далее из (2) получаем

$$X\kappa_\alpha^\beta = \frac{2}{3}\delta_\alpha^\beta\dot{X} + \Gamma_\alpha^\beta, \tag{3}$$

где Γ_α^β = const. Учитывая, что $\kappa_\alpha^\alpha = \dot{\gamma}/\gamma$, и беря след от (3), находим $\Gamma_\alpha^\alpha = 0$. Тогда первое из уравнений (2), дающее связь между начальными значениями, принимает вид: $\Gamma_\alpha^\beta\Gamma_\beta^\alpha = 32\Lambda B^2$. Поскольку $\Lambda > 0$ и постоянные интегрирования Γ_α^β предполагаются действительными, получаем $B^2 \geq 0$; удобно положить $\Gamma_\alpha^\beta = (4k/3)B\lambda_\alpha^\beta$, так что $\lambda_\alpha^\beta\lambda_\beta^\alpha = 6$, и для $\gamma_{\alpha\beta}$ получаем

$$\frac{d}{dt}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}X^{-1}(\dot{X}\delta_\alpha^\nu + 2kB\lambda_\alpha^\nu)\gamma_{\beta\nu}.$$

Повернем оси координат так, чтобы матрица γ_α^β была диагональна, тогда, согласно (3), такой же вид примет и λ_α^β. Обозначим собственные значения λ_α^β через λ_α: $\lambda_\alpha^\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; из свойств λ_α^β следует, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 0$ и $\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 = 6$. Отсюда видно, что $|\lambda_\alpha| \leq 2$ и числа λ_α расположены следующим образом: $-2 \leq \lambda_1 \leq -1 \leq \lambda_2 \leq 1 \leq \lambda_3 \leq 2$. Для компонент $\gamma_{\alpha\beta}$ получаем

$$\gamma_{\alpha\alpha} = e^{(2kt/3)}(1 - Be^{-kt})^{\frac{2}{3}(1+\lambda_\alpha)}(1 + Be^{-kt})^{\frac{2}{3}(1-\lambda_\alpha)} \tag{4}$$

(не суммировать по α!). При $t \to \infty$ решение достаточно быстро изотропизуется: $\gamma_{\alpha\alpha} \simeq e^{(2kt/3)}[1 - (4/3)\lambda_\alpha B e^{-kt}]$ (анизотропия определяется экспоненциально малыми поправками) и стремится к решению де Ситтера $\gamma_{\alpha\alpha}\exp(2kt/3)$. Последнее получается из общего решения (4) при выборе $B = 0$. В дальнейшем считаем, что $B > 0$, тогда при $t = t_0 \equiv k^{-1}\ln B$ решение сингулярно: обращается в нуль $\det\|\gamma_{\alpha\beta}\| \equiv X^2$ и расходятся инварианты тензора кривизны. Последнее удобнее всего видеть из выражения для квадрата тензора Вейля C^2:

$$C^2 = \frac{64}{3}\Lambda^2\frac{B^2}{X^2}\left[1 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{B}{X}\left(1 + 4\frac{B^2}{X^2}\right)^{1/2} + 8\frac{B^2}{X^2}\right]$$

(при выводе этого выражения учтено, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha^3 = 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ и $\sum_\alpha \lambda_\alpha^4 = 18$).

Единственный несингулярный случай соответствует $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Тогда

$$C^2 = \frac{256}{3}\frac{B^4}{X^4}\Lambda^2\left[1 - \left(1 + \frac{X^2}{4B^2}\right)^{1/2}\right]^2$$

и $C^2 \to 4\Lambda^2/3$ при $X \to 0$. Далее, полагая $t = t_0 + \tau$, находим, что при $\tau \simeq 0$ метрика имеет вид

$$\gamma_{\alpha\alpha} \simeq \tau^{2(1+\lambda)/3}[1 + (1 + \lambda_\alpha)3k\tau] \tag{5}$$

(не суммировать по α!). Вводя вместо величин λ_α набор величин p_α согласно $\lambda_\alpha = 3p_\alpha - 1$, перепишем (5) в виде $\gamma_{\alpha\alpha} \simeq \tau^{2p_\alpha}(1 + p_\alpha k\tau)$, так что при $\tau \simeq 0$ метрика (5) близка к метрике Казнера $\gamma_{\alpha\alpha} = \tau^{2p_\alpha}$ (для p_α имеем из свойств λ_α, как и следовало ожидать, $\sum p_\alpha = \sum p_\alpha^2 = 1$). Отмеченный выше несингулярный случай соответствует плоскому пространству решения Казнера ($p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = 1$). Однако на этом примере хорошо видно, что при $\tau \to 0$ метрики (4) и казнеровская близки, но не совпадают, а именно, различны производные от $\gamma_{\alpha\alpha}$, что и приводит к тому, что в нашем случае несингулярное решение не описывает плоского пространства: $C^2 \neq 0$; при этом квадрат тензора Римана $= 4\Lambda^2$. Совпадают метрика (4) и казнеровская только при $\Lambda \to 0$. Так, при $\Lambda \simeq 0$ имеем

$$C^2 \simeq \frac{16}{27}\frac{B^4}{\tau^4}\left[\frac{9\Lambda^2}{4B^4}\tau^4 - 27p_1p_2p_3\left(1+\frac{3\Lambda\tau^2}{2B^2}\right)\right],$$

что в пределе $\Lambda \to 0$ дает казнеровское значение $C^2 = -16\gamma^{-2}p_1p_2p_3$.

Рассмотрим теперь случай $\Lambda < 0$. Для X имеем уравнение $\ddot{X} = 3\Lambda X$, поэтому положим $X = \sin k(t-t_0)$, $k^2 = -3\Lambda$, $t_0 = \mathrm{const}$. Из (2) снова получаем (3), где постоянная матрица Γ^β_α удовлетворяет условиям $\Gamma^\alpha_\alpha = 0$ и $\Gamma^\beta_\alpha\Gamma^\alpha_\beta = -8\Lambda > 0$. Положим $\Gamma^\beta_\alpha = (2/3)k\lambda^\beta_\alpha$, тогда матрица λ^β_α оказывается такой же, как и в разделе 1, и для $\gamma_{\alpha\beta}$ получаем уравнение $d\gamma_{\alpha\beta}/dt = (2/3)X^{-1}(\delta^\nu_\alpha\dot{X} + k\lambda^\nu_\alpha)\gamma_{\beta\nu}$. Диагонализируя $\gamma_{\alpha\beta}$, получаем

$$\gamma_{\alpha\alpha} = [\sin(k\tau/2)]^{2(1+\lambda_\alpha)/3}[\cos(k\tau/2)]^{2(1-\lambda_\alpha)/3} \tag{6}$$

(не суммировать по α!), где $\tau = t - t_0$. Это решение, как и должно быть, соответствует решению (4), записанному в виде

$$\gamma_{\alpha\alpha} = [\mathrm{sh}(k\tau/2)]^{2(1+\lambda_\alpha)/3}[\mathrm{ch}(k\tau/2)]^{2(1-\lambda_\alpha)/3}. \tag{7}$$

При малых τ снова получаем из (6) решение, близкое к казнеровскому: $\gamma_{\alpha\alpha} \simeq (t-t_0)^{2p_\alpha}$; таково же поведение $\gamma_{\alpha\alpha}$ и при $k\tau \to \pi$: $\gamma_{\alpha\alpha} \simeq (\pi - k\tau)^{2(1-\lambda_\alpha)/3}$. При $\tau = 0$ и $\tau = \pi/k$ модель сингулярна:

$$C^2 = (16\Lambda^2/3X^4)[2 - X^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3(1-X^2)^{1/2}\mathrm{sign}\dot{X}]$$

и, вообще говоря, $C^2 \to \infty$ при $X \to 0$ (т.е. при $\tau \to 0$, $\tau \to \pi/k$). В том случае, который был выделен при $\Lambda \geq 0$, а именно $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, получаем регулярность при $\tau \to 0$: $C^2 \to (4/3)\Lambda^2$, но $C^2 \to \infty$ при $\tau \to \pi/k$. В случае, симметричном этому, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ получаем: $C^2 \to \infty$ при $\tau \to 0$, но $C^2 \to (4/3)\Lambda^2$ при $\tau \to \pi/k$. В этих двух случаях сингулярны либо только начало, либо только конец эволюции, в остальных случаях модель и начинается, и заканчивается в сингулярности. Таким образом, при $\Lambda < 0$ нет ни регулярных, ни изотропных решений. Отсутствие последних (типа решения де Ситтера при $\Lambda > 0$) связано с конечным временем существования модели: она не успевает изотропизоваться за конечное время ($0 \leq \tau \leq \pi/k$), тогда как при $\Lambda > 0$ оказалось возможным начало эволюции отодвинуть в $-\infty$ ($t_0 = k^{-1}\ln B \to -\infty$ при $B \to 0$), за счет чего при конечных временах модель оказывается изотропной. Это особенно хорошо видно, если решение (4) переписано в форме (7).

Полученное при $\Lambda > 0$ решение (4) обобщает решения де Ситтера и Казнера: оно стремится к де-ситтеровскому при $t \to \infty$, а при $t \to \tau_0$ оказывается близким к казнеровскому. Иными словами, модель де Ситтера оказывается неустойчивой при $t \to \tau_0$, и инфляционные сценарии типа Гуса-Линде никоим образом не могут решить проблему начальной сингулярности (то же относится и к концу эволюции, если для нее допустить де-ситтеровскую дефляционную стадию). Но если проблема сингулярности тем или иным способом решена, то инфляционный сценарий может возникнуть при неизотропных начальных условиях, так как общее решение (4) достаточно быстро стремится к де-ситтеровскому при расширении.

Итак, хотя для уравнений (1) с Λ-членом условия теоремы Пенроуза о неизбежности сингулярности и не выполнены, но сингулярность устраняется только при определенном выборе одной из постоянных интегрирования ($B = 0$, модель де Ситтера).

Следует отметить, что решение (4) в другом (эквивалентном) виде приведено в статье Я. Зельдовича и А. Старобинского [9]. Таким образом, пункт 2 настоящей статьи можно было бы опустить. Однако мы сохраняем его по следующей причине: в указанной статье Я. Зельдовича и А. Старобинского обсуждаются космологические модели с нетривиальными топологиями, и именно решение данной задачи (в виде, эквивалетном (4)) приводится в качестве примера модели с 3-пространством, имеющим топологию 3-тора, что является основой дальнейших обсуждений. Поэтому мы приводим подробный вывод этой метрики с целью показать, что данное решение получено именно в 3-пространстве с тривиальной топологией и вряд ли имеет какое-либо отношение к пространствам с топологией 3-тора, обсуждаемым в упомянутой статье.

Заметим также, что в статье К. Томита [10] обсуждается изотропизация моделей пространств, заполненных идеальной жидкостью (с учетом Λ-члена); при этом приведены точные решения для анизотропных моделей пространств, заполненных пылью и излучением при $\Lambda = 0$; это является обобщением обычной модели Фридмана, так же как (4) является обобщением обычной модели де Ситтера.

3. Предложенная М. А. Марковым модификация уравнений Эйнштейна [3 – 5] в одном из своих вариантов приводит к "отскоку" при конечном радиусе за счет изменения знака эффективной плотности энергии материи при определенном сжатии модели [6, 11]. Этот результат был получен для изотропной модели, и могло бы возникнуть сомнение в устойчивости такого решения. Покажем, что это решение устойчиво. Пусть модель заполнена пылью, так что $T_0^0 = \epsilon + \Lambda$, $T_\alpha^\beta = \Lambda\delta_\alpha^\beta$, где ϵ и Λ – некоторые функции плотности материи ρ [3], а следовательно, и "элементарного объема" $\sqrt{\gamma} \equiv X$. Явный

вид этих функций для нас несуществен, важно лишь, что всегда $\Lambda(X) > 0$, и при некотором значении X меняется знак у $\epsilon(X)$, что и ведет к отскоку (по крайней мере, для изотропной модели). Построим теперь общее решение в окрестности точки отскока $X = X_0$. Положим $\epsilon(X) = \epsilon_0 + M\Delta X$, $\Lambda(X) = \Lambda_0 + N\Delta X$, где $\epsilon_0 = \epsilon(X_0)$, $\Lambda_0 = \Lambda(X_0)$ и $\Delta X = X - X_0$. Тогда из (2) получаем: $\Delta\ddot{X} = (3/2)[(2\Lambda_0 + \epsilon_0)X_0 + (2\Lambda_0 + \epsilon_0 + 2NX_0 + MX_0)\Delta X]$, откуда $\Delta X = (3/4)(2\Lambda_0 + \epsilon_0)X_0\Delta t^2 + ...$, где $\Delta t = t - t_b$ (более точное определение ΔX и остальных искомых величин потребовало бы определения соотношений между M и N и является для наших целей излишним). Таким образом, чтобы отскок имел место, должно быть $2\Lambda_0 > -\epsilon_0$. Далее, из (2) получаем, как и должно быть, (3), где Γ_α^β должны удовлетворять гамильтоновой связи $\Gamma_\alpha^\beta\Gamma_\beta^\alpha = -8(\epsilon_0 + \Lambda_0)X_0^2$, так что должно быть $\Lambda_0 \leq -\epsilon_0$. Следовательно, отскок происходит при таком сжатии, что $\Lambda_0 \leq -\epsilon_0 \leq 2\Lambda_0$ (напомним, что $\Lambda(X) > 0$, так что, как и следовало ожидать, $\epsilon_0 < 0$). Вводя снова матрицы λ_α^β, получаем $X\kappa_\alpha^\beta = (2/3)\dot{X}\delta_\alpha^\beta + (2/\sqrt{3})(-\epsilon_0 - \Lambda_0)^{1/2}\lambda_\alpha^\beta$, откуда

$$\gamma_{\alpha\alpha} = 1 + (2/\sqrt{3})\lambda_\alpha X_0^{-1}(-\epsilon_0 - \Lambda_0)^{1/2}\Delta t + (1/2)(2\Lambda_0 + \epsilon_0)\Delta t^2 + ...$$

(не суммировать по α). Изотропной модели соответствует $\epsilon_0 + \Lambda_0 = 0$, и все $\gamma_{\alpha\alpha}$ достигают минимума одновременно с $\sqrt{\gamma}$. Анизотропия ($\epsilon_0 + \Lambda_0 \neq 0$) приводит только к тому, что "отскок" происходит по разным осям в разное время: по оси x^α при $t = t_b - (2/\sqrt{3})\lambda_\alpha X_0^{-1}(-\epsilon_0 - \Lambda_0)^{1/2}(\epsilon_0 + 2\Lambda_0)^{-1}$, где t_b соответствует минимальному значению $\sqrt{\gamma}$. В заключение подчеркнем, что t_b определяется только условием $\Lambda_0 < -\epsilon_0 < 2\Lambda_0$, при этом параметры ϵ_0 и Λ_0 – классические величины, которые могут не быть связаны, вообще говоря, с планковской плотностью или длиной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., Наука, 1990.

[2] Penrose R. Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).

[3] Марков М. А. Письма в ЖЭТФ, **36**, 214 (1982).

[4] Markov M. A., Mukhanov V. F. Nuovo Cimento, **86**, 97 (1985).

[5] Марков М. А. УФН, **164**, N 1, 63 (1994).

[6] Марков М. А. Препринт ФИАН N 13, М., 1994.

[7] Мальцев В. К. Препринт ИЯИ N 791/1992, ИЯИ.

[8] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. М., Наука, 1973.

[9] З е л ь д о в и ч Я., С т а р о б и н с к и й А. Письма в АЖ, **10**, 323 (1984).

[10] T o m i t a K. Phys. Rev., **D48**, 5634 (1993).

[11] А м а н А. Г., М а р к о в М. А. ТМФ, **58**, 163 (1984).

Институт ядерных исследований РАН Поступила в редакцию 15 сентября 1997 г.