УДК 539.747

О ВИХРЯХ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ПЕРЕХОДА В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ

А. С. Малишевский, В. П. Силин

Рассмотрено магнитное поле и распределение электрического тока вокруг джозефсоновского перехода в тонкой сверхпроводящей пленке. Применительно к условиям нелокальной джозефсоновской электродинамики получены аналитические закономерности, описывающие поле и ток. Закономерности проиллюстрированы на примере периодической цепочки вихрей с отличным от нуля средним магнитным полем.

Иванченко и Соболева [1, 2] сформулировали для случая тонкой сверхпроводящей пленки, разделенной туннельным переходом, основы нелокальной джозефсоновской электродинамики. При этом толщина пленки d полагалась много меньшей лондоновской глубины λ проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник. В пределе экстремально сильной нелокальности, когда характерный масштаб изменения вихревой структуры мал по сравнению с эффективной глубиной $\lambda_e = \lambda^2/d$ проникновения магнитного поля в пленку, уравнение Иванченко и Соболевой для разности фаз φ куперовских пар по разные стороны перехода принимает вид:

$$\sin\varphi(z) = \frac{l}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{z'-z}\,\frac{d\varphi(z')}{dz'}, \tag{1}$$

где $l = c\phi_0/(16\pi^2 j_c \lambda^2)$, j_c – плотность критического тока Джозефсона, $\phi_0 = \pi\hbar c/|e|$ – квант магнитного потока. По виду уравнение (1) совпадает с соответствующим уравнением нелокальной электродинамики массивных джозефсоновских переходов [3, 4]. Этим фактом воспользовались авторы работы [5], которые рассмотрели магнитное поле и электрический ток на основе полученного в работе [3] решения уравнения (1) для несущего один квант магнитного потока одиночного вихря Абрикосова – Джозефсона.

В настоящем сообщении обсуждается вид магнитного поля и распределение электрического тока для периодической цепочки вихрей в случае неравной нулю усредненной вдоль туннельного перехода напряженности магнитного поля. Проведенное ниже рассмотрение иллюстрируется, в частности, на основе решения уравнения (1), полученного в работе [6] и имеющего следующий вид:

$$\varphi(z) = \pi + 2\mathrm{Arctg}[(\sqrt{L^2/l^2+1} + L/l)\mathrm{tg}(z/2L)], \tag{2}$$

где L характеризует периодичность вихрей Абрикосова – Джозефсона вдоль туннельного перехода, толщина которого считается пренебрежимо малой.

Располагая ось x вдоль сверхпроводящих пленок, а ось y перпендикулярно плоскости пленок, можно записать следующее выражение для вектора магнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathrm{sgny}\,\frac{\phi_0}{8\pi^2\lambda_e}\nabla\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\frac{d\varphi(z')}{dz'}R(|y|, \sqrt{x^2+(z-z')^2}), \tag{3}$$

где ядро нелокальной связи магнитного поля и разности фаз имеет вид

$$R(|y|,\rho) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dq}{q+1}\exp\left(-\frac{|y|q}{2\lambda_e}\right)J_0\left(\frac{\rho q}{2\lambda_e}\right). \tag{4}$$

Здесь $J_0(\xi)$ – функция Бесселя, $\rho = \sqrt{x^2+(z-z')^2}$. При этом

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)R(|y|,\rho) = 0.$$

Из формулы (4) непосредственно следуют асимптотические выражения:

$$R(|y|,\rho) \approx \frac{2\lambda_e}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}, \text{если}\, y^2+\rho^2 \gg 4\lambda_e^2,$$

$$R(|y|,\rho) \approx \ln\frac{4\lambda_e}{\gamma\sqrt{x^2+(z-z')^2}}, \text{если}\, y=0,\ \rho^2 \ll 4\lambda_e^2,$$

где $\gamma = 1,78....$

Для электрического тока $\mathbf{J}(x,z) = \mathbf{j}(x, y=0, z)d$ имеем соотношение:

$$\left\{\begin{matrix} J_x(x,z) \\ J_z(x,z)\end{matrix}\right\} = \frac{c\phi_0}{16\pi^3\lambda_e}\left\{\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\end{matrix}\right\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz'\frac{d\varphi(z')}{dz'}R(0,\sqrt{x^2+(z-z')^2}). \tag{5}$$

Сравнивая эту формулу с (3), можно непосредственно выразить ток через магнитное поле:

$$J_x(x,z) = \frac{c}{2\pi}[\mathrm{sgny} H_z(\mathbf{r})]_{y=0},$$

$$J_z(x,z) = -\frac{c}{2\pi}[\mathrm{sgny} H_x(\mathbf{r})]_{y=0}.$$

В случае периодической цепочки вихрей производную фазы можно представить в виде

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{zn}{L}. \tag{6}$$

При этом

$$\frac{A_0}{L} \equiv \overline{\frac{d\varphi}{dz}} = \frac{\varphi(\pi L) - \varphi(-\pi L)}{2\pi L},$$

знак усреднения отвечает процедуре вычисления среднего по периоду.

В частном случае решения (2), когда

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{l}{L^2}\frac{1}{\sqrt{1+(l/L)^2} - \cos(z/L)},$$

коэффициенты A_n разложения этой функции имеют вид:

$$A_0 = 1,\ A_n = 2\left(\sqrt{\frac{l^2}{L^2}+1} - \frac{l}{L}\right)^n,\ n \neq 0.$$

Вклад в выражение (3) нулевой гармоники ($n = 0$) разложения (6) отвечает полю, усредненному по периоду зависимости от z. Для такого усредненного поля имеем $H_z = 0$ и

$$\bar{H}_x(x,y) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{4\pi^2\lambda_e}\overline{\frac{d\varphi}{dz}}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q+1}\exp\left(-\frac{|y|q}{2\lambda_e}\right)\sin\left(\frac{xq}{2\lambda_e}\right), \tag{7}$$

$$\bar{H}_y(x,y) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\overline{\frac{d\varphi}{dz}}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q+1}\exp\left(-\frac{|y|q}{2\lambda_e}\right)\cos\left(\frac{xq}{2\lambda_e}\right). \tag{8}$$

При этом было учтено соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz J_0\left(\frac{\sqrt{x^2+z^2q}}{2\lambda_e}\right) = \frac{4\lambda_e}{q}\cos\left(\frac{xq}{2\lambda_e}\right).$$

Полученные выражения для магнитного поля позволяют показать для среднего тока, что $\bar{J}_x = 0$ и

$$\bar{J}_z(x) = \frac{c\phi_0}{8\pi^3\lambda_e}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\int\limits_0^{\infty}\frac{dq}{q+1}\sin\left(\frac{xq}{2\lambda_e}\right) =$$

$$= \frac{c\phi_0}{8\pi^3\lambda_e}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\left[-\mathrm{si}\left(\frac{x}{2\lambda_e}\right)\cos\left(\frac{x}{2\lambda_e}\right) + \mathrm{ci}\left(\frac{x}{2\lambda_e}\right)\sin\left(\frac{x}{2\lambda_e}\right)\right]. \tag{9}$$

На расстояниях от туннельного слоя, значительно превышающих λ_e, когда

$$x^2 + y^2 \gg 4\lambda_e^2, \tag{10}$$

согласно (7), (8) получаем

$$\bar{H}_x(x,y) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{2\pi^2}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\frac{x}{x^2+y^2};\ \bar{H}_y(x,y) = -\frac{\phi_0}{2\pi^2}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\frac{|y|}{x^2+y^2}, \tag{11}$$

согласно (9) при $|x| \gg \lambda_e$ имеем

$$\bar{J}_z(x) = \frac{c\phi_0}{4\pi^3}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\frac{1}{x}.$$

Если же выполняется условие, противоположное (10), когда

$$x^2 + y^2 \ll 4\lambda_e^2, \tag{12}$$

то имеем

$$\bar{H}_x(x,y) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\mathrm{arctg}\frac{x}{y};\ \bar{H}_y(x,y) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\ln\frac{2\lambda_e}{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{13}$$

Соответственно для тока получаем

$$\bar{J}_z(x) = \frac{c\phi_0}{16\pi^2\lambda_e}\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\mathrm{sgn}x.$$

Имея в виду условие применимости решения (2), будем считать, что

$$L \ll \lambda_e. \tag{14}$$

С другой стороны очевидно, что периодическая зависимость (5) вне туннельного слоя может проявляться только на расстояниях от слоя $\sim L$. Поэтому в области (10) наряду со средним полем (11) могут проявляться только малые по амплитуде осцилляции, зависящие от координаты z. Справедливость такого утверждения можно усмотреть с помощью соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \cos\frac{nz}{L} R(|y|, \sqrt{x^2+z^2}) = \frac{2L}{n}\int\limits_0^{\infty} \frac{d\psi}{\mathrm{ch}\psi + (L/2\lambda_e n)} \exp\left(-\frac{n|y|}{L}\mathrm{ch}\psi\right) \times$$
$$\times \cos\left(\frac{nx}{L}\mathrm{sh}\psi\right),$$

правая часть которого при $n \neq 0$ содержит малый множитель L. Аналогичное утверждение о малости осциллирующей по z зависимости в области (12) можно сделать при выполнении дополнительного условия

$$x^2 + y^2 \gg L^2.$$

Однако вблизи туннельного перехода, когда

$$x^2 + y^2 \ll L^2 \ll \lambda_e^2, \tag{15}$$

зависимость от координаты z оказывается существенной.

Для получения выражений, описывающих поле в области (15), воспользуемся соотношением (14), которое для осциллирующей добавки к (13) позволяет записать следующие выражения:

$$\delta H_x(x,y,z) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{4\pi^2\lambda_e L}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{nz}{L} F_x\left(\frac{n|y|}{L}, \frac{nx}{L}\right),$$
$$\delta H_y(x,y,z) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e L}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{nz}{L} F_y\left(\frac{n|y|}{L}, \frac{nx}{L}\right),$$
$$H_z(x,y,z) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{4\pi^2\lambda_e L}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{nz}{L} F_z\left(\frac{n|y|}{L}, \frac{nx}{L}\right),$$

где

$$F_x(a,b) = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\psi \mathrm{sh}\psi}{\mathrm{ch}\psi + (L/2n\lambda_e)} \exp(-a\mathrm{ch}\psi)\sin(b\mathrm{sh}\psi),$$

$$F_y(a,b) = \int_0^\infty \frac{d\psi \mathrm{ch}\psi}{\mathrm{ch}\psi + (L/2n\lambda_e)} \exp(-a\mathrm{ch}\psi)\cos(b\mathrm{sh}\psi),$$

$$F_z(a,b) = \int_0^\infty \frac{d\psi}{\mathrm{ch}\psi + (L/2n\lambda_e)} \exp(-a\mathrm{ch}\psi)\cos(b\mathrm{sh}\psi).$$

В последних интегралах в соответствии с (14) можно пренебречь $L/2n\lambda_e$, а также учесть тот факт, что в этих интегралах основной вклад возникает от больших значений ψ. Тогда

$$F_x(a,b) \approx \int_1^\infty \frac{dt}{t} \exp\left(-\frac{at}{2}\right) \sin\left(\frac{bt}{2}\right) \approx \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, \tag{16}$$

$$F_y(a,b) \approx \int_1^\infty \exp\left(-\frac{at}{2}\right) \cos\left(\frac{bt}{2}\right) \approx \ln\frac{2}{\gamma\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{17}$$

$$F_z(a,b) \approx 2\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \exp\left(-\frac{at}{2}\right) \cos\left(\frac{bt}{2}\right) \approx 2.$$

Формула (16) позволяет записать

$$H_x(x,y,z) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\frac{d\psi(z)}{dz}\mathrm{arctg}\frac{x}{y}.$$

Используя формулу (17), при пренебрежении в ней логарифмической зависимостью от n, получаем

$$H_y(x,y,z) = -\frac{\phi_0}{4\pi^2\lambda_e}\left[\frac{\overline{d\varphi}}{dz}\ln\frac{\lambda_e}{L} + \frac{d\varphi(z)}{dz}\ln\frac{2L}{\gamma\sqrt{x^2+y^2}}\right].$$

Для z-проекции магнитного поля имеем

$$H_z(x,y,z) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{4\pi^2\lambda_e L}\sum_{n=1}^\infty A_n \sin\frac{nz}{L}.$$

В случае решения (2) согласно соотношению

$$2\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha n}\sin\frac{nz}{L} = \frac{\sin(z/L)}{\mathrm{ch}\alpha - \cos(z/L)},$$

где $\mathrm{ch}\,\alpha = \sqrt{(l/L)^2+1}$, получаем

$$H_z(x,y,z) = -\frac{\phi_0 \mathrm{sgny}}{2\pi^2\lambda_e L}\frac{\sin(z/L)}{\sqrt{(l/L)^2+1-\cos(z/L)}}.$$

Не описываемая последним выражением зависимость поля от координат x и y отвечает пренебрежению слабым искажением z-проекции магнитного поля в ближней к джозефсоновскому переходу области (15). Для тока в этой области $|x| \ll L$ имеем

$$\bar{J}_x = -\frac{c\phi_0}{4\pi^3\lambda_e L}\frac{\sin(z/L)}{\sqrt{(l/L)^2+1-\cos(z/L)}};\ \bar{J}_z = \frac{c\phi_0}{16\pi^2\lambda_e}\frac{d\psi}{dz}.$$

Сравнение тока J_x с током распаривания показывает, что l и L должны быть больше корреляционной длины. Это является условием применимости уравнения (1).

Подводя итог, можно утверждать, что в настоящей работе изложен подход к теоретическому рассмотрению магнитного поля и тока, связанных с вихревой структурой в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке в условиях достаточно сильного критического джозефсоновского тока и сильного среднего магнитного поля, когда джозефсоновская электродинамика является нелокальной. Подчеркнем здесь, что в отличие от нелокальной джозефсоновской электродинамики массивных сверхпроводников, вихри которой имеют регулярное ядро, то есть их магнитное поле не имеет особенности, рассмотренное в настоящем сообщении магнитное поле джозефсоновского перехода обладает сингулярностью, которая подобна вихрям Абрикосова, которые обычно регуляризуются на расстояниях порядка корреляционной длины.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иванченко Ю. М., Соболева Т. К. Письма в ЖЭТФ, **51**, 100 (1990).

[2] Ivanchenko Yu. M., Soboleva T. K. Phys. Lett., **A147**, 65 (1990).

[3] Gurevich A. Phys. Rev., **B46**, 3187 (1992).

[4] Алиев Ю. М., Силин В. П. ЖЭТФ, **104**, 2526 (1993).

[5] Mints R. G., Snapiro I. B. Phys. Rev., **B49**, 6188 (1994).

[6] Алфимов Г. Л., Силин В. П. ЖЭТФ, **106**, 671 (1994).

Поступила в редакцию 8 декабря 1995 г.