УДК 532.591+513.81

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ВОЛНЫ

А. С. Бирюков, А. Н. Логунов, А. К. Шмелев

В статье изложен один из геометрических методов анализа процесса распространения импульсной волны. В качестве ортогональных криволинейных координат выбраны потенциалы волнового поля. Компоненты метрического тензора g^{ii} для такой координатной системы имеют смысл плотностей энергии волного поля. Применение метода иллюстрируется на простых физических примерах.

Хорошо известно, что в ряде случаев геометрические методы анализа физических процессов являются удобным инструментом, позволяющим физически интерпретировать математически абстрактно сформулированную задачу (см., например, [1, 2]). Один из таких методов, в частности, используемый в общей теории относительности, состоит в том, что рассматриваемая физическая задача решается в определенным образом вводимой криволинейной координатной системе. При обратном переходе из нее к декартовым координатам удается установить некоторые важные физические закономерности исследуемого процесса.

В данной работе мы продемонстрируем плодотворность геометрического метода при описании процесса распространения импульсной волны в пространстве и времени. Введение криволинейных координат в данном случае, вообще говоря, является естественным, поскольку метрика вводимого искривленного пространства-времени оказывается взаимосвязанной с самим физическим процессом.

Рассмотрим процесс распространения импульсной волны. Под импульсной волной понимается возмущение, локализованное в пространстве и времени. Для простоты и наглядности сначала ограничимся иллюстрацией процесса распространения волны в двумерном пространстве-времени, декартовы координаты которого будем обозначать x, t.

Пусть импульсная волна характеризуется напряженностью волнового поля $E(x,t)$. Тогда в качестве криволинейных ортогональных координат x^0, x^1 имеет смысл выбрать потенциалы этого поля относительно декартова базиса (ct, x):

$$E^i = \frac{\partial x^i}{c\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial x};\ E = E^1 E^0;\ (i = 0,\, 1;\ c = \mathrm{const}).$$

Положительные знаки в этом выражении выбраны путем соответствующего задания направления осей x^i.

Для такого способа выбора системы криволинейных ортогональных координат контравариантные компоненты метрического тензора имеют простую физическую интерпретацию:

$$g^{00} = \left(\frac{\partial x^0}{c\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^0}{\partial x}\right)^2,\ g^{11} = \left(\frac{\partial x^1}{c\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial x}\right)^2.$$

Они представляют собой две компоненты (временную и пространственную) плотности энергии волнового поля вдоль временной t и пространственной x декартовых координат. Ковариантные компоненты метрического тензора g_{ii} представляют собой величины $g_{00} = (g^{00})^{-1}$, $g_{11} = (g^{11})^{-1}$, обратные этим плотностям энергии волнового поля. Таким образом, в декартовой координатной системе имеет место связь метрики с полем.

Проиллюстрируем эту связь на простом примере электрического поля E точечного заряда в трехмерном пространстве $E(r) = \alpha/r^2$, где $\alpha = \mathrm{const}$, r – расстояние от заряда до точки наблюдения. В этом случае $x^1 = -\frac{\alpha}{r}$ и $g^{11} = (dx^1/dr)^2 = E^2(r) = \alpha^2/r^4$. При выборе масштаба изменения $\Delta x^1 = \mathrm{const}$ в криволинейной системе координат видно, что в декартовом базисе по мере приближения к заряду будет наблюдаться сгущение азимутальных координатных линий.

Сделанное выше замечание, касающееся связи метрики с полем в декартовом базисе, является, по-видимому, полезным в общей теории относительности, поскольку оно позволяет дать физическую интерпретацию абстрактным геометрическим объектам – криволинейной координатной системе и метрическому тензору. Отметим, что ранее в [3] компоненты метрического тензора для слабого поля интерпретировались как потенциалы поля.

Теперь вернемся к задаче о распространении импульсной волны в двумерном пространстве-времени (x, t) и покажем, как в геометрическом представлении описывается движение такой волны. Пусть задана импульсная волна $E = E_0\cos(kx - \omega t)$; $-\pi/2 \leq$

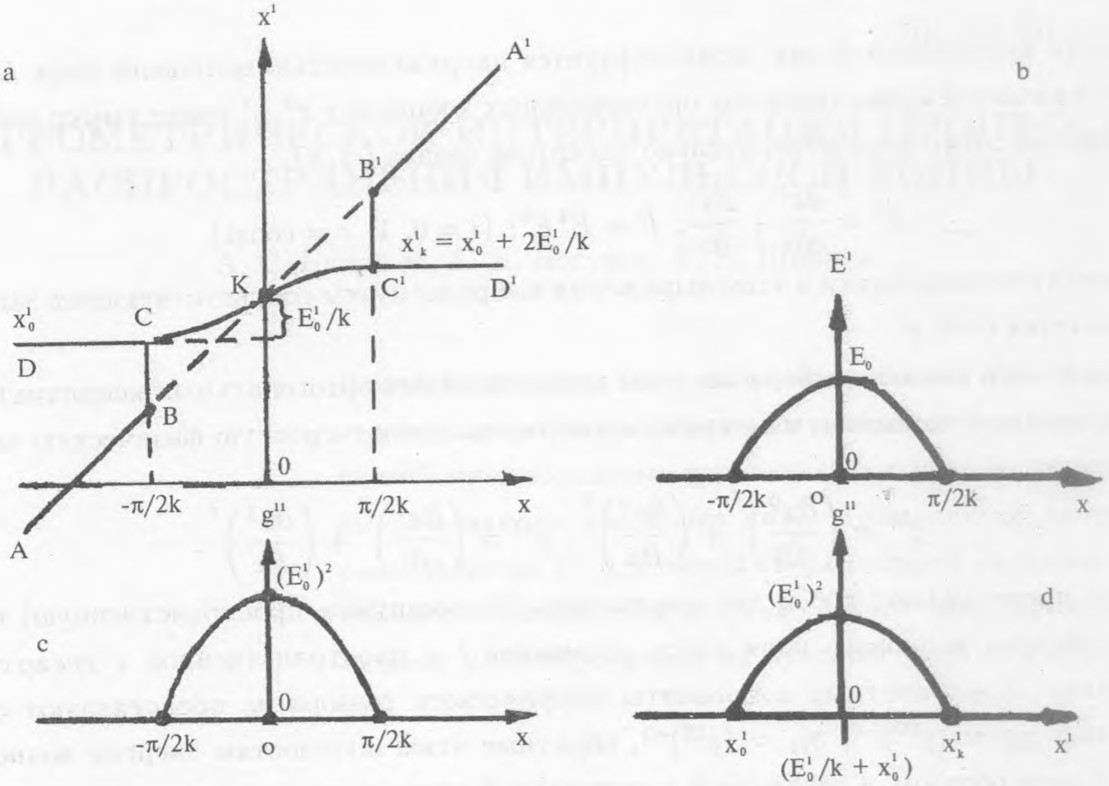

Рис. 1. *Зависимости* $x^1(x)$, $E^1(x)$, $g^{11}(x)$ *и* $g^{11}(x^1)$, *иллюстрирующие характеристики волны* E^1 *в момент времени* $t = 0$.

$kx - \omega t \leq \pi/2$; E_0, k, ω – постоянные величины. Положим $t = 0$. Тогда координата x^1 связана с x соотношением $x^1 = x^1_0 + (E^1_0/k)[\sin(kx) + 1]$, где $x^1_0 = \text{const}$, $E^1_0 = \text{const}$. Эта зависимость показана на рис. 1а. Ей соответствует линия $DCKC'D'$.

Из рис. 1 видно, что координатные линии x^1 в декартовом базисе будут иметь максимальное сгущение в окрестности точки, где E^1 достигает своего максимального значения. В области, где волна отсутствует, имеет смысл выбрать метрику евклидовой, т.е. $g_{ii} = 1$. Тогда метрика на краях области определения волны будет претерпевать разрывы BC, $B'C'$ (см. рис. 1а). Необходимо отметить, что за пределами области определения волны, включая ее границу, т.е. в областях ABC и $A'B'C'$, метрика будет иметь исключительно геометрический смысл, а внутри области определения волны – как геометрический, так и физический смысл.

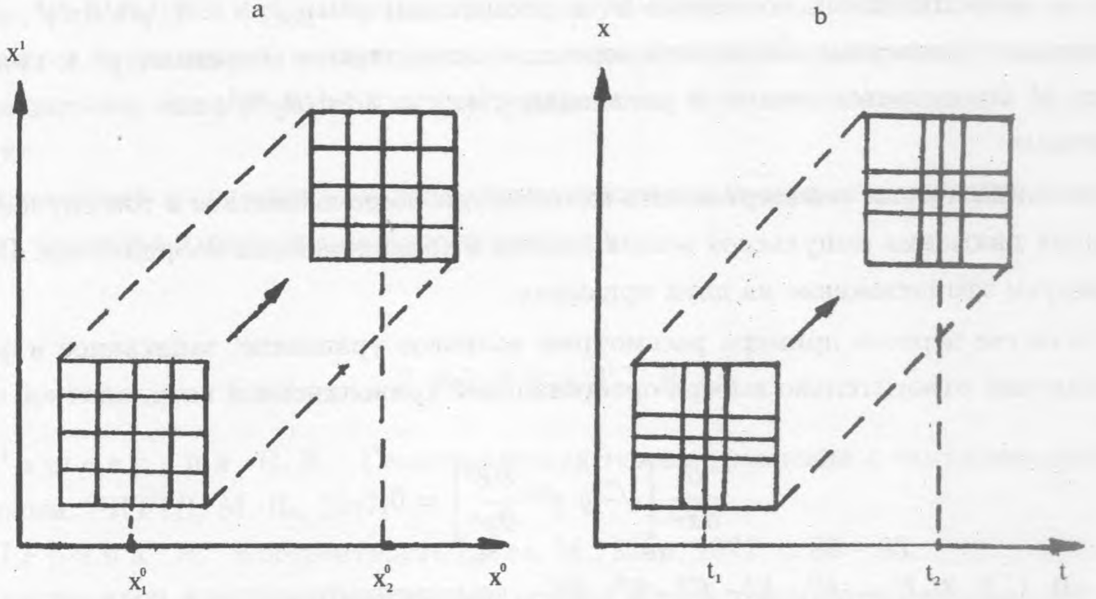

Рис. 2. *Положение импульсной волны в моменты времени t_1 и t_2 в координатных системах (x^1, x^0) и (x, t).*

Из рис. 1a видно, что в координатах (x^1, x) волна представляет собой складку. С учетом временной зависимости эта складка будет перемещаться как вдоль оси x^1, так и вдоль оси x. Если зафиксировать $x = 0$ и анализировать зависимости $E^0(t)$, $x^0(t)$, $g^{00}(t)$, $g^{00}(x^0)$, то, очевидно, они будут похожи на соответствующие зависимости, изображенные на рис. 1. В координатах (x^0, x^1) и (t, x) движение волны иллюстрируется на рис. 2. На рис. 2a показаны два положения волны в моменты времени x_1^0 и x_2^0 в координатах (x^0, x^1), а на рис. 2b – соответствующие положения волны в декартовом базисе (t, x) в моменты времени t_1 и t_2. Из этого рисунка видно, что если в базисе (x^0, x^1) внутри области определения импульсной волны координатные линии имеют постоянную густоту как вдоль x^0, так и вдоль x^1 (см. рис. 2a), то в декартовом базисе (t, x) (см. рис. 2b) координатные линии более густы в центре области определения волны вдоль t и x, чем в окрестности соответствующих краев этой области.

Имеется взаимно однозначное соответствие между процессами движения волны в

(x^0, x^1) и в (t, x). В общем случае криволинейная и декартова координатные системы внутри области определения импульса связаны системой уравнений, позволяющей перейти от криволинейных координат x^i к декартовым y^α: $g_{ii}(x) = (\partial y^\alpha / \partial x^i)^2$, где y^α – зависимые переменные. Обратный переход от декартовых координат y^α к криволинейным x^i описывается системой уравнений $g^{ii}(x) = (\partial x^i / \partial y^\alpha)^2$, где x^i – зависимые переменные.

Изложенным выше геометрическим методом удобно пользоваться в том случае, если уравнения движения импульсной волны заданы в криволинейных координатах. Проиллюстрируем это положение на двух примерах.

В качестве первого примера рассмотрим волновое уравнение, записанное в форме, инвариантной относительно выбора ортогональной криволинейной координатной системы

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sqrt{-g}\; g^{\mu\mu}\frac{\partial E}{\partial x^\mu}\right] = 0,$$

где μ =0, 1, 2, 3; $E = E^0 \cdot E^1 \cdot E^2 \cdot E^3$; E^μ – компоненты волнового поля вдоль соответствующих нормальных координат x^μ, $g = det(g_{\mu\mu})$. В рамках рассмотренных выше представлений величины $g^{\mu\mu}$ являются плотностями энергии полей E^μ. Таким образом, в отличие от традиционного случая, когда $g^{\mu\mu}$ зависят только от x^μ, задача является существенно нелинейной. Нелинейность обусловлена связью метрики с полем.

Вторым примером, также иллюстрирующим связь метрики с полем, является система уравнений Эйнштейна для пустого пространства, записанная в метрической форме $R_{\mu\nu} = 0$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$, где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи. Это – система нелинейных дифференциальных уравнений относительно $g^{\mu\mu}$ и, следовательно, относительно плотностей энергии четырех ортогональных компонент волнового поля.

В заключение отметим, что данная выше интепретация волновых процессов полезна при анализе трех- и четырехмерных пространственно-временных задач о распространении импульсов излучения в вакууме. Этот вывод можно сделать из следующего замечания. В случае линейного волнового уравнения для описания распространения ограниченных волновых пучков метрика $g^{\mu\mu}(x)$ обычно задается в рамках модели гармонической координатной системы, т.е. из решения уравнения Лапласа. Такая модель справедлива для описания низкочастотных волновых пучков, когда скорость поперечной дифракции стремится к бесконечности. Однако при распространении высокочастотных волновых пучков в трех- и четырехмерных задачах поперечный дифракционный эффект имеет конечную скорость, которая уменьшается по мере увеличения частоты поля. В этом случае дифракционный эффект необходимо учитывать не только как процесс переноса энергии волнового поля в поперечном по отношению к волновому пучку направлении, но и как фактор, изменяющий метрику координатной системы. В этом случае становится оправданной концепция связи криволинейной координатной системы с полем излучения. Одна из возможных интерпретаций этой концепции дана в настоящей заметке.

Изложенный выше метод анализа можно использовать при моделировании процесса распространения импульсов лазерного излучения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. ГИТТЛ, М.-Л., 1947.

[2] Перина Я. Когерентность света, М., Мир, 1974, с. 80 – 83.

[3] Эйнштейн А. Формальные основы общей теории относительности. Собр. научных трудов, т. 1, М., Наука, 1965, с. 326.

Поступила в редакцию 15 января 1996 г.