УДК 530.145+535.33

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПУТЯМ ГРУППЫ SU(2) В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

В. П. Карасев

В рамках техники интегралов по путям группы $SU(2)$ получены общие выражения для определения эволюционного оператора и энергетического спектра нелинейных моделей квантовой оптики, допускающих формулировку в терминах полиномиальных алгебр Ли $su_{pd}(2)$. Показана ключевая роль когерентных состояний группы $SU(2)$ в решении этих задач.

Недавно было показано [1, 2], что широкий класс нелинейных моделей квантовой оптики, включая модели многофотонного рассеяния и точечную модель Дике, допускает переформулировку в терминах полиномиальных алгебр Ли $su_{pd}(2)$ с генераторами $V_{\alpha=0,\pm}$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[V_0, V_\pm] = \pm V_\pm, [V_-, V_+] = \varphi(V_0) \equiv \psi_{m+1}(V_0+1) - \psi_{m+1}(V_0),$$
$$[V_\alpha, \psi_{m+1}(R_0)] = 0, \ -\psi_{m+1}(R_0) \equiv V_+V_- - \psi_{m+1}(V_0) = 0, \tag{1a}$$

где определяющий все свойства алгебры структурный полином

$$\psi_{m+1}(V_0) = \Lambda_0 \prod_{i=1}^{m+1} (V_0 + \lambda_i(\{R_j\})), \ m \geq 2, \ [V_\alpha, R_i] = 0 \tag{1b}$$

зависит как от весового оператора V_0, так и от (операторных) интегралов движения $R_i, i = 1, \ldots$ (Λ_0 – числовая константа).

При этом гамильтонианы H моделей выражаются в форме

$$H = \hbar[C(\{R_i\}) + \Delta V_0 + gV_+ + g^* V_-], \tag{2a}$$

где операторные константы $C(\{R_i\})$ и числовые коэффициенты Δ, g определяются из исходных формулировок моделей с помощью G-инвариантного полиномиального отображения Йордана [1, 2]. Кроме того, имеет место разбиение [1]

$$L(H)\sum_{[l_i]} L([l_i]),\ L([l_{i=0,1,\ldots}]) = Span\{|[l_i];\, f\rangle = \mathcal{N}(f;[l_i])V_+^f|[l_i]\rangle\} \tag{2b}$$

гильбертовых пространств $L(H)$ квантовых состояний моделей в прямую сумму $su_{pd}(2)$-инвариантных подпространств $L([l_i])$ размерности $d([l_i])$, описывающих специфические кластерные "домены", нумеруемые интегралами движения l_i. При этом фиксированные для каждого $L([l_i])$ "псевдовакуумные" векторы $|[l_i]\rangle \in L(H)$ удовлетворяют условиям

$$R_j|[l_i]\rangle = l_j|[l_i]\rangle,\ j = 1,\ldots,\ V_-|[l_i];f\rangle = 0,\ V_0|[l_i];f\rangle = l_0|[l_i];f\rangle,\ \psi_{m+1}(l_0) = 0, \tag{2c}$$

а $\mathcal{N}(f;[l_i]) = [(\psi_{m+1}(l_0+f))^{(f)}]^{-1/2} \equiv [\prod_{i=1}^{f}\psi_{m+1}(l_0+i)]^{-1/2}$ – нормировочные константы.

Соотношения (2) задают $su_{pd}(2)$-кластерную формулировку исходных моделей, которая в формально-спектроскопическом плане представляет "деформированный" аналог полуклассической версии известной точечной модели Дике [3] (с заменой алгебры $su(2)$ на $su_{pd}(2)$). Она полностью определяет динамику исходных моделей, поскольку гамильтониан (2a) и оператор временной эволюции $U_H(t) = \exp(-iHt/\hbar)$ зависят только от переменных V_α и имеют в ортонормированном базисе $|[l_i];f\rangle$ блочно-диагональную форму; так, например, имеем

$$U_H(t) = \sum_{[l_i],f,f'} U_{f,f'}^{[l_i]}(t)|[l_i];f\rangle\langle[l_i];f'|. \tag{3}$$

Поэтому для расчета динамики $\langle A(t)\rangle = Tr[U_H(t)\rho U_H^+(t)A]$ произвольных физических величин A с оператором плотности начального квантового состояния ρ необходимо нахождение с помощью соотношений (1) явных выражений для коэффициентов $U_{f,f'}^{[l_i]}(t)$ в (3).

Точные методы решения этой задачи были рассмотрены в работах [1, 2, 4]; однако они не приводят к простым замкнутым выражениям для всех искомых величин, что затрудняет анализ физических проблем и выявление новых эффектов [2]. В то же время известно, что метод обобщенных когерентных состояний (КС) групп и алгебр Ли [5] и связанные с ними техники "интегралов по путям" [6] поставляют мощные средства решения спектральных и эволюционных задач в различных областях физики. Заметим, однако, что непосредственное применение этих техник к моделям (2) затруднительно, поскольку алгебрам $su_{pd}(2)$ не соответствуют какие-либо конечномерные группы Ли (а только псевдогруппы, для которых нет "конечных" формул Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, которые лежат в основе эффективного применения групповых КС) [4]. Тем не менее, сходство формул (1) с определяющими соотношениями $[Y_0, Y_\pm] = \pm Y_\pm$, $[Y_-, Y_+] = -2Y_0$ для генераторов Y_α обычной алгебры $su(2)$ позволило развить основанные на использовании КС группы $SU(2)$ в качестве пробных функций вариационные техники и получить замкнутые приближенные выражения для $U_H(t)$ [2].

Их нахождение базируется на альтернативной к (2a) $su(2)$-кластерной форме

$$H = H(\{Y_\alpha\}) = \hbar[\Delta Y_0 + Y_+ \tilde{g}(Y_0) + \tilde{g}^+(Y_0) Y_- + \tilde{C}], \ \tilde{g}(Y_0) = g\sqrt{\phi(Y_0)}, \ \tilde{C} = C + \Delta(j + l_0) \quad (4)$$

гамильтонианов (2a), получаемой на $d([l_i])$-мерных пространствах $L([l_i])$ с помощью преобразований

$$Y_0 = V_0 \ l_0 - j, \ Y_+ = V_+[\phi(Y_0)]^{-1/2}, \ \phi_m(Y_0) = \frac{\psi_{m+1}(V_0+1)}{\psi_2(Y_0+1)}, \ Y_- = (Y_+)^+, \quad (5)$$

где $\psi_2(Y_0) = (j + Y_0)(j + 1 - Y_0)$, $j = j([l_i]) = [d([l_i]) - 1]/2 = s/2$ – значения кластерного квазиспина, определяющего "радиусы" кластерных сфер Блоха $S^2(j; \mathbf{n})$ и старшие веса неприводимых представлений $su(2)$, реализуемых через отображения (5) на $L([l_i])$. Соотношения (4) и (2b) (при соответствующем переопределении $|[l_i]; f\rangle$ в терминах Y_α) задают $su(2)$-кластерную формулировку моделей (2), представляющую в спектроскопическом плане своеобразный нелинейный аналог точечной модели Дике.

Помимо вариационных схем [2], эта формулировка допускает для решения спектральных и эволюционных задач применение техники интегралов по путям группы $SU(2)$ [6], базирующейся на использовании КС группы $SU(2)$ спинового типа [5, 6, 2], которые с учетом разложения (2b) задаются на $L(H)$ в виде

$$|\xi(\mathbf{n}); [l_i]\rangle \equiv |\theta, \phi; [l_i]\rangle = S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{n})|[l_i]\rangle, \ S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{n}) \equiv \exp[\xi(\mathbf{n}) Y_+ - \xi(\mathbf{n})^* Y_-], \ \xi(\mathbf{n}) = \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (6)$$

соответствующем расслоению $L(H)$ над единичной сферой Блоха $S^2(1; \mathbf{n}) = SU(2)/U(1)$ и задающем "кластерно-квазиклассическое" описание состояний в пределах каждого подпространства $L([l_i])$. КС (6) образуют на $L(H)$ сверхполные системы состояний с полудискретной версией

$$I \equiv \sum_{[l_i],f} |[l_i]; f\rangle\langle[l_i]; f| = \sum_{[l_i]} \int_{S^2(1;\mathrm{n})} d\mu^j(\mathrm{n})|\xi(\mathrm{n}); [l_i]\rangle\langle\xi(\mathrm{n}); [l_i]| \quad (7)$$

"разложения единицы I", где $d\mu^j(\mathrm{n}) = (4\pi)^{-1}(2j+1)\sin\theta d\theta d\phi$, $j = j([l_i])$ [2].

С учетом блочно-диагональной структуры гамильтонианов (2a), (4) и "разложения единицы" (7), КС (6) позволяют применить технику интегралов по путям $SU(2)$ [6] для вычисления пропагатора $\langle\Psi_f|U_H(t)|\Psi_i\rangle$ с произвольными начальным $|\Psi_i\rangle$ и конечным $|\Psi_f\rangle$ состояниями, а также для нахождения спектра гамильтонианов (4). Действительно, используя (7), находим

$$\langle\Psi_i|U_H(t)|\Psi_i\rangle = \sum_{[l_i]} \int d\mu^j(\mathrm{n}_i) \int d\mu^j(\mathrm{n}_f) \langle\Psi_f|\xi_f;\, [l_i]\rangle\langle\xi_i; [l_i]|\Psi_i\rangle K_{[l_i]}(\xi_f, t|\xi_i, 0), \quad (8)$$

где согласно [6] для $K_{[l_i]}(\xi_f, t|\xi_i, 0) \equiv \langle\xi_f; [l_i]|U_H(t)|\xi_i; [l_i]\rangle$ имеем выражение

$$K_{[l_i]}(\xi_f, t|\xi_i, 0) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{[l_i]}\right]\prod d\mu^j(z(t)),\ d\mu^j(z) = \frac{(2j+1)}{\pi}\frac{dxdy}{(|z|^2+1)^2}, \quad (9a)$$

$$S_{[l_i]} = \int \left\{\frac{ij\hbar}{2}\frac{zz^* - \dot{z}^* z}{(|z|^2+1)} - H_{[l_i]}(z, z^*)\right\} dt,\ z = x + iy = \tan\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}, \quad (9b)$$

а матричные элементы $H_{[l_i]}(z, z^*) = \langle\xi_f; [l_i]|H|\xi_i; [l_i]\rangle$ в (9b) задаются соотношениями [2]

$$H_{[l_i]}(z, z^*) = \tilde{C} + \Delta\frac{s(|z|^2-1)}{2(|z|^2+1)} - 2|g|\frac{|z|}{(|z|^2+1)^s}\sum_{f\geq 0}\frac{(s)!(zz^*)^f}{(s-1-f)!f!}\times$$

$$\times\sqrt{\phi_m(-j+f)} \approx \tilde{C} + \Delta\frac{s(|z|^2-1)}{2(|z|^2+1)} - 2s|g|\frac{|z|}{(|z|^2+1)}\sqrt{\phi_m\left(\frac{s(|z|^2-1)}{2(|z|^2+1)}\right)}. \quad (10)$$

При этом второе равенство (10) соответствует вычислению $H_{[l_i]}(z, z^*)$ в приближении "кластерного среднего поля", определяемого соотношениями [2, 8]

$$\langle F(\{V_\alpha\})\rangle = F(\{\langle V_\alpha\rangle\}),\ \langle|H(\{Y_\alpha\})|\rangle = H(\{\langle|Y_\alpha|\rangle\}). \quad (11)$$

Спектр гамильтониана (4) в формализме интеграла по путям определяется [6] из нахождения полюсов функции Грина

$$G_{[l_i]}(E) = i\int_0^\infty dT \exp\left(\frac{iET}{\hbar}\right) Tr_{[l_i]}\left[\exp\left(\frac{-iHT}{\hbar}\right)\right] = Tr_{[l_i]}\left[\frac{1}{E-H}\right],$$

где $Tr_{[l_i]}[A] = \sum_f \langle [l_i]; f|A|[l_i]; f\rangle$. Вычисляя след эволюционного оператора $U_H(t)$ из (3) на $L([l_i])$ в базисе КС (6) и учитывая (9), получим

$$G_{[l_i]}(E) = i\int_0^\infty dT \exp\left(\frac{iET}{\hbar}\right) \oint d\mu^j(Z_0) \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{[l_i]}\right] \prod_t d\mu(Z(t)), \tag{12}$$

где все пути соответствуют совпадающим начальным и конечным точкам Z_0.

Таким образом, в формализме интегралов по путям решение как эволюционной, так и спектральной задач сводится к нахождению определяемой формулами (9b), (10) функции действия S и последующему вычислению интегралов (9a), (12). Точные решения этих задач в общей форме затруднительны в силу существенной нелинейности выражений (10), но они известны в "классическом пределе" [6].

Так, "классический предел" решения эволюционной задачи находится из решения аналогов "классических" канонических уравнений движения в комплексной форме (ср. [2]):

$$is\hbar\frac{dz}{dt} = (|z|^2+1)^2\frac{\partial \mathbf{H}_{[l_i]}(z,z^*)}{\partial z^*}, \quad is\hbar\frac{dz^*}{dt} = -(|z|^2+1)^2\frac{\partial \mathbf{H}_{[l_i]}(z,z^*)}{\partial z}, \tag{13}$$

где для $\mathbf{H}_{[l_i]}(z,z^*)$ используется приближение (11) "кластерного среднего поля". Уравнения (13) соответствуют гармоническому приближению [2] для эволюционного оператора в вариационном методе Хартри–Фока с зависимостью от времени [7] и решаются в общем случае в терминах (гипер)эллиптических функций [2].

"Классическое" решение спектральной задачи определяется нахождением полюсов (задаваемой классическим действием $S^{cl}_{[l_i]}$ в (12)) "классической" функции Грина

$$G^{cl}_{[l_i]}(E) \simeq \sum_{p\cdot o} \exp\left[i\frac{W_{[l_i]}(E)}{\hbar}\right]\oint d\mu^j(Z_0) \propto \sum_{p\cdot o}\exp\left[i\frac{W_{[l_i]}(E)}{\hbar}\right]\left(1-\exp\left[i\frac{W_{[l_i]}(E)}{\hbar}\right]\right), \tag{14a}$$

где $W_{[l_i]}(E) = S^{cl}_{[l_i]}(T(E)) + E(T(E))$, а период $T(E)$ определяется из условия экстремума

$$\partial S^{cl}_{[l_i]}/\partial T + E = 0 \Longrightarrow H_{[l_i]}(Z, Z^*) = E. \tag{14b}$$

Это приводит к правилам квантования Бора–Зоммерфельда

$$W_{[l_i]}(E) = \oint_{H_{[l_i]}=E} \langle Z(t); [l_i]|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|Z(t); [l_i]\rangle dt = 2n_{[l_i]}\pi\hbar \tag{15}$$

для периодических орбит $(p \cdot o)$ на сферах Блоха $S^2(j; \mathbf{n})$. Заметим, однако, что в отличие от базирующихся на (13) квазиклассических решениях эволюционной задачи (8) – (10), рецепт вычисления квазиклассических уровней энергии с помощью формул (14) – (15) значительно сложней по сравнению с аналогичными вычислениями в рамках вариационной схемы, основанной на минимизации функционала "энергетических ошибок"; кроме того, последняя позволила выявить двоякопериодическую динамику "кластерных" величин $\langle \Psi_i | U_H(t) Y_\alpha U_H^+(t) | \Psi_i \rangle$ при $|\Psi_i\rangle \in L([l_i])$ [2].

Полученные таким образом "классические" решения могут трактоваться как ведущие члены (низшего порядка) в так называемых $1/N$-разложениях [8] с большим параметром $N = d([l_i]) = s+1$. Имея, однако, в виду трудоемкость вычисления квантовых поправок в рамках таких разложений [6], можно развивать и другие схемы решения рассмотренных выше задач в рамках техники интегралов по путям, но с использованием альтернативных к (6) типов КС.

В частности, принимая во внимание линейность выражений (2а) по генераторам $su_{pd}(2)$, можно использовать для этой цели КС $su_{pd}(2)$, определяемые как "собственные состояния" оператора V_- [9]:

$$|\mathbf{z}; [l_i]\rangle = \sum_{f=0}^{s} \lambda_f(\mathbf{z}) V_+^f |[l_i]\rangle, \;\; V_- |\mathbf{z}; [l_i]\rangle = \mathbf{z} |\mathbf{z}; [l_i]\rangle. \tag{16a}$$

Очевидно, что решения уравнений (16а) могут быть найдены с пара-грассмановыми (но не с обычными c-числовыми z) "собственными значениями" $\mathbf{z} = z\theta \; : \; \theta^{s+1} = 0, \, Tr_\theta \theta^{+f} \theta^f = s+1-f, \; s = d([l_i]) - 1$ [10] и имеют следующий вид:

$$|\mathbf{z}; [l_i]\rangle = \lambda_0(\mathbf{z}) \sum_{f=0}^{s} \frac{\mathbf{z}^f \otimes V_+^f}{(\psi_{m+1}(l_0+f))^{(f)}} |[l_i]\rangle, \;\; \lambda_0^{-2}(\mathbf{z}) = \sum_{f=0}^{s} \frac{|z|^{2f}(s+1-f)}{(\psi_{m+1}(l_0+f))^{(f)}}. \tag{16b}$$

Отметим, что для КС (16) может быть определен аналог "разложения единицы" (7) (ср. [9]). Поэтому главная задача заключается в конструировании с их помощью аналогов выражений (9), (12). Ее решение можно искать путем соответствующих модификаций вычислительных процедур [11] для КС типа (16), но с обычными грассмановыми параметрами.

Автор благодарит Г. Чадзитаскоса, Л. А. Шелепина и В. С. Ярунина за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карасев В. П. ТМФ, **95**, 3 (1993); Karassiov V. P. J. Phys. A, **27**, 153 (1994).

[2] Karassiov V. P. Phys. Lett. A, **238**, 19 (1998); J. Rus. Laser Res., **20**, 239 (1999).

[3] Chumakov S. M. and Kozierowski M. Quantum Semiclass. Opt., **8**, 775 (1996).

[4] Karassiov V. P. Rep. Math. Phys., **40:2**, 235 (1997); Czech. J. Phys., **48**, 1381 (1998).

[5] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[6] Inomata A., Kuratsuji H., and Gerry C. C. Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1, 1), World Scientific, Singapore (1992).

[7] Negele J. M. Rev. Mod. Phys., **54**, 913 (1982).

[8] Berezin F. A. Comm. Math. Phys., **63**, 131 (1978); Yaffe L. G. Rev. Mod. Phys., **54**, 407 (1982); Chatterjee A. Phys. Rep., **186**, 249 (1990).

[9] Chadzitaskos G. and Odzijewicz A. Lett. Math. Phys., **43**, 199 (1998).

[10] Filippov A., Isaev A., and Kurdikov A. Mod. Phys. Lett., **A7**, 2129 (1992).

[11] Kochetov E., Yarunin V., and Zhuravlev M. Physica, C **296**, 298 (1998).

Поступила в редакцию 29 декабря 1999 г.