УДК 530.12:531.51

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. Ю. Андреев, Д. А. Киржниц

В предположении о постоянстве скорости звука в веществе найдены точные решения статической общерелятивистской задачи для распределения вещества, зависящего лишь от одной координаты.

Подобно задаче Шварцшильда, поддается точному решению и одномерная задача общей теории относительности (ОТО). Под одномерной ниже понимается трехмерная (в пространственном смысле) задача, для которой распределение вещества и метрика зависят, как и в радиально-симметричном случае, лишь от одной координаты – в данном случае декартовой координаты $x^1 = x$. Нетривиальный характер соответствующих решений позволяет надеяться на возможность их использования как немаловажного подспорья при решении реальных задач ОТО подобно одномерным моделям квантовой теории поля или квантовой статистики.

Решение уравнений ОТО упрощается, если скорость звука в веществе $s = (p/\epsilon)^{1/2}c$ постоянна, где ϵ — плотность энергии (включая энергию покоя), p — давление; например, для горячего вещества и вакуумного конденсата величина p/ϵ равна соответственно, 1/3 и –1. Из общерелятивистского уравнения равновесия [1]

$$\nabla p = -\frac{1}{2}\nabla \ln g_{00}(\epsilon + p) \tag{1}$$

следует соотношение

$$\kappa^2 = {\kappa_0}^2 (g_{00})^{-(1+s^2)/2s^2}, \tag{2}$$

где g_{00} — метрический тензор, $\kappa^2 = 16\pi G\epsilon/c^4$, G — постоянная Ньютона. Формула (2) жестко связывает величину ϵ с метрикой, позволяя избежать решения двух отдельных задач — по определению метрики и распределения вещества (энергии).

Начнем с выяснения роли эффектов ОТО, относительный вклад которых дается соотношением между характерным пространственным масштабом задачи L и зависящими от G и c параметрами размерности длины. Внутри вещества таким параметром служит величина $1/\kappa \sim c^2/(G\epsilon)^{1/2}$. Эффекты ОТО, растущие вместе с G и $1/c$, малы при $L < 1/\kappa$. Так обстоит дело и в радиальном, и в одномерном случае.

Однако вне вещества ситуация в этих задачах различна. В первой из них вещество проявляет свою полную массу M, чему отвечает параметр $r_g = 2GM/c^2$— гравитационный радиус. Напротив, в одномерной задаче проявляется не масса M (она бесконечна), а масса m, приходящаяся на единицу поверхности, ортогональной оси x. Этому отвечает параметр $x_g = c^2/Gm$. Эффекты ОТО малы при $L > r_g$ (радиальный случай) и при $L < x_g$ (плоский случай). Для конкретности мы приведем соответствующие числа для нашей Галактики: радиус $\sim 10^{22}$ *см*, толщина $\sim 5 \cdot 10^{20}$ *см*, $M \sim 10^{44}$ *г*, $m \sim 0{,}1$ *г/см*^{2}, $1/\kappa \sim 10^{23}$ *см*, $x_g \sim 10^{29}$ *см*, $r_g \sim 10^{16}$ *см*.

Положим далее скорость света равной единице. Компоненты (00), (11) и (22) (или (33)) одномерных статических уравнений Эйнштейна

$$\nu'' + (\nu')^2/2 - \nu'\lambda'/2 + \mu'\nu' = \kappa^2 e^{\lambda}(1 + 3s^2)/2, \tag{3а}$$

$$\nu'' + 2\mu'' + (\nu')^2/2 + (\mu')^2 - \nu'\lambda'/2 - \mu'\lambda' = -\kappa^2 e^{\lambda}(1 - s^2)/2, \tag{3б}$$

$$\mu'' + (\mu')^2 - \mu'\lambda'/2 + \mu'\nu'/2 = -\kappa^2 2e^{\lambda}(1 - s^2)/2, \tag{3в}$$

где отличные от нуля компоненты метрического тензора

$$g_{00} = e^{\nu},\ g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = g_{33} = -e^{\mu}$$

ведут после исключения вторых производных к уравнению

$$(\mu')^2 + 2\mu'\nu' = 2\kappa^2 e^{\lambda} s^2, \tag{4}$$

заменяющему собой (3*б*). Комбинация (3*а*, *в*) и (4) дает формулу (1).

Введем обозначение $(1 + 3s^2)/4s^2 = \mathrm{cth}\alpha$. Пользуясь недоопределенностью нашей системы, отражающей свободу в выборе координаты x, удобно положить $\lambda = (2\mathrm{th}\alpha - 1)\nu$. Тогда с учетом (2) задача сводится к уравнениям

$$(\mu')^2 + 2\mu'\nu' = 2{\kappa_0}^2 s^2 \exp(-2\nu/\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha), \tag{5а}$$

$$\nu'' + (1 - \mathrm{th}\alpha)(\nu')^2 + \mu'\nu' = 2{\kappa_0}^2 s^2 \mathrm{cth}\alpha \exp(-2\nu/\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha). \tag{5б}$$

Выражая μ' через ν' в $(5a)$ и подставляя ее в $(5б)$, приходим к не зависящему от аргумента и легко решаемому уравнению. Из–за двузначности величины μ' тем же свойством будут обладать и другие величины. Этот вопрос обсуждается ниже.

Решения системы (5) имеют вид:

$$\exp\nu = (\sigma\Lambda)^{\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha},\ \exp\mu = (\sigma^{\mathrm{cth}\alpha}/\Lambda)^{\exp(-\alpha)\mathrm{sh}\alpha}, \tag{6}$$

$$\Lambda = (e^{-\alpha}\sigma^{\mathrm{cth}\alpha} + e^{\alpha}\sigma^{-\mathrm{cth}\alpha})/(2\mathrm{cth}\alpha).$$

Выражения для $\exp\lambda$ и κ^2 получаются из $\exp\nu$ умножением показателя $\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha$, соответственно, на $2\mathrm{th}\alpha - 1$ и $1 - 2\mathrm{cth}\alpha$. В соответствии с отмеченной выше двузначностью

$$\sigma = 1 \pm \sqrt{2}\kappa_0 sx \tag{7}$$

(за начало отсчета координаты принята точка 0). Константу κ_0 можно выразить через заданную плотность масс (см. выше)

$$m = \frac{1}{16\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\kappa^2\,dx = K\kappa_0/G, \tag{8}$$

причем для коэффициента K получается громоздкое выражение через бета–функцию Эйлера. Можно ввести эффективную толщину a распределения вещества формулой $m = {\kappa_0}^2 a/16\pi G$. Она связывает введенные выше параметры $1/{\kappa_0}^2 \sim ax_g$.

Решения, отвечающие (7), несимметричны относительно плоскости $x = 0$, но переходят друг в друга при отражении в этой плоскости (спонтанное нарушение симметрии). Каждое из них регулярно по одну и сингулярно по другую сторону плоскости $x = 0$, причем координата сингулярности равна

$$|x_0| = (\sqrt{2}\kappa_0 s)^{-1} = Q/ms, \tag{9}$$

где коэффициент Q – функция скорости звука. Эту сингулярность следует считать истинной: как видно из (6), в точке x_0 детерминант метрического тензора равен нулю. (Появление истинных особенностей в статических решениях уравнений Эйнштейна, не обладающих сферической симметрией, подробнее обсуждается в [2, 3].)

При $G \to 0$ величины $\exp\nu$, $\exp\lambda$ и κ^2 ведут себя обычным пертурбативным образом, разлагаясь по целым степеням G. Однако величина $\exp\mu$, имеющая разложение $1 + \sqrt{2}\kappa_0 sx$, неаналитична по G, разлагаясь по степеням $\sqrt{G}$. Такая непертурбативная структура, следующая уже из (5а), обязана влиянию далеких концов системы, усиливающему проявления тяготения.

Важный предельный случай отвечает модели "пыли" $s \to 0$. В этом пределе коэффициент K в (8) равен $s/2\sqrt{2}\pi$ и, соответственно,

$$\sigma = 1 \pm 4\pi G m x, \tag{7'}$$

а координата сингулярности (см.(9)) $|x_0| = (4\pi G m)^{-1}$. Для величин (6) имеем

$$\exp\nu = \sigma, 1/\sigma;\ \exp\mu = 1,\ \sigma^2, \tag{6'}$$

где первое значение отвечает $\sigma > 1$ (регулярной области), второе – $0 < \sigma < 1$ (сингулярной области). Величина κ^2 стремится к нулю при всех не равных нулю x и сводится в пределе $s \to 0$ к $16\pi G m \delta(x)$. Казалось бы, есть возможность получить решение без сингулярности, относя первое решение (верхний знак в (7′)) к области $x > 0$ и второе решение (нижний знак) к области $x < 0$, т.е. принимая $\sigma = 1 + 4\pi G m|x|$. Однако такой гибрид противоречит уравнению (5б) в точке $x = 0$, где возникает лишняя дельта-функция.

Этого противоречия нет в иной постановке задачи, когда все вещество считается сосредоточенным за счет сил негравитационного происхождения в узком слое около плоскости $x = 0$. Вне этого слоя следует брать решения уравнений (5) без правых частей (и с условием $\mathrm{th}\alpha = 0$), двойной набор которых имеет вид

$$\exp\nu = 1 + Cx,\ (1 - C'x)^{-1};\ \exp\mu = 1,\ (1 - C'x)^2.$$

Постоянные C, C' находятся из условия сшивания на плоскости $x = 0$, где можно использовать ньютоновское приближение (см. выше) $\nu = 4\pi G m|x|$. Поэтому наши решения совпадают с набором (6′). В итоге мы приходим к регулярному выражению

$$\exp\nu = 1 + 4\pi G m|x|, \exp\mu = 1, \tag{10}$$

которое находится в полном соответствии с полученным в начале статьи.

Особый интерес представляет случай вакуумного конденсата, которому отвечает $s^2 = -1$. К сожалению, здесь нельзя использовать уже полученное решение (6) (хотя бы из–за бессмысленности величины σ) и приходится проводить расчет заново. Мы приводим его результат:

$$\exp\nu = \sigma^{-1/3}(4/(\sigma+3))^{2/3}, \exp\mu = \sigma^{2/3}(4/(\sigma+3))^{2/3}, \tag{11}$$

где $\sigma = 1 \pm 2\sqrt{2}\kappa_0 x$. Величина $\exp\lambda$ представляет собой куб величины $\exp\nu$. Как видно, и здесь возникают сингулярности. Интересно отметить, что существует и другое решение наших уравнений, имеющее существенно более простой вид и не содержащее сингулярностей

$$\nu = \pm\sqrt{2}\kappa_0 x,\ \mu = -\nu,\ \lambda = 0. \tag{11}$$

Примечательной особенностью случая $s^2 = -1$ служит постоянство плотности энергии конденсата и независимость ее от гравитационного поля $\kappa^2 = {\kappa_0}^2$ (см. (2)). Отметим, что в отличие от обычного вещества именно величина κ_0 должна считаться заданной, так как через нее прямо выражаются массы промежуточных бозонов, фермионов и т.п. Отметим также, что из–за вырождения вакуума положение и ориентация плоскости $x = 0$ произвольны и определяются малыми случайными внешними воздействиями. Другие нетривиальные результаты, вытекающие из аналогичных трехмерных решений для конденсата и имеющие прямое отношение к астрофизике и космологии, мы надеемся подробно обсудить в следующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., Наука, 1967.

[3] Синг Дж. Л. Общая теория относительности. М., ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию 21 марта 1996 г.