УДК 533.9;539.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Ш. Г. Амиранашвили, Н. Г. Гусейн-заде, А. М. Игнатов

Низкотемпературная заряженная плазма в магнитном поле образует квазикристаллы, наблюдаемые экспериментально. В данной работе исследована устойчивость некоторых типичных плоских конфигураций заряженных частиц в магнитном поле.

В последние годы значительно возрос интерес к изучению свойств равновесных состояний и устойчивости заряженной плазмы, удерживаемой магнитным полем.

Обычно ловушки, удерживающие заряженную плазму, имеют цилиндрическую симметрию. Например, в ловушке Пеннинга, о которой пойдет речь в дальнейшем, направленное вдоль оси металлического цилиндра магнитное поле B удерживает частицы от разбегания в поперечном (относительно магнитного поля) направлении, а электростатический потенциал, приложенный к торцам цилиндра, удерживает их в продольном направлении.

В недавних экспериментах (см. обзор [1]) ионы бериллия Be^+ в течение длительного времени удерживались в ловушке Пеннинга, и такая ионная плазма посредством технологии лазерного охлаждения доводилась до температур порядка $T \sim 10^{-3} K$. В этом случае возникает ионное облако и при $e^2 n^{1/3}/kT \gg 1$ можно проследить за возникновением кристаллического состояния. Если число частиц невелико, то они выстраиваются в различные простые геометрические конфигурации. При этом техника эксперимента позволяет следить даже за положением отдельных частиц.

В настоящей работе теоретически рассмотрена устойчивость одной из подобных конфигураций. Для простоты ограничимся следующей постановкой задачи. Пусть N одинаковых классических частиц с массой m и зарядом q движутся в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю B. Положение отдельной частицы удобно характеризовать комплексным числом $z = x+iy$. Если скорость частиц мала по сравнению со скоростью света, то уравнение движения n-той частицы выглядит следующим образом:

$$\ddot{z}_n + i\Omega\dot{z}_n = \frac{q^2}{m}\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{z_n - z_k}{|z_n - z_k|^3}, \; 1 \leq n \leq N. \tag{1}$$

Здесь $\Omega = qB/mc$ – циклотроннная частота вращения одной частицы в магнитном поле. Если $N > 1$, то (1) становится сложным нелинейным уравнением. Однако легко построить его частное решение, которое является обобщением циклотронного вращения. При этом частицы располагаются в вершинах правильного N-угольника и вращаются с одинаковой частотой. Пусть общий радиус вращения частиц есть R. Тогда кроме Ω появляется еще один "геометрический" параметр с размерностью частоты $\nu = \sqrt{q^2/mR^3}$. Именно устойчивость такого многоугольника и будет ниже исследована. Априори она может зависеть от N и безразмерного отношения $\lambda = (\Omega/\nu)^2$.

Отметим, что похожие решения в виде вращающихся правильных многоугольников хорошо известны в физике. Прежде всего они возникли в гидродинамике идеальной жидкости при описании движения точечных вихрей [2]. В соответствующем уравнении движения отсутствует член со второй производной, и показатель степени в правой части равен двум. На качественном уровне устойчивость этих конфигураций исследовал Кельвин [3], а Дж.Дж. Томпсон построил математическую теорию [4], показав, что многоугольники, содержащие больше шести вихрей, неустойчивы. Аналогичный результат получается при рассмотрении взаимодействия N электронных столбов в дрейфовом приближении [5], учет инерции электронов, т.е. слагаемого с $\ddot{z}$, тоже не приводит к изменениям, и в этом случае неустойчивость также начинается с $N = 7$. Таким образом, в литературе имеются исследования уравнения, аналогичного (1), но с другим показателем степени в законе взаимодействия. Случай кулоновской силы, который как раз отвечает квазикристаллическим состояниям заряженных ионных облаков, ранее не исследовался и рассмотрен ниже.

Для построения нужного решения (1) удобно ввести параметр $\eta = \exp(2\pi i/N)$, поскольку степени η в комплексной плоскости как раз располагаются в вершинах правильного многоугольника. Положим $z_n = \eta^n R \exp(-i\omega t)$. Тогда (1) примет вид:

$$-\omega^2 + \Omega\omega = \nu^2 \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{1 - \eta^{k-n}}{|1 - \eta^{k-n}|^3}. \tag{2}$$

Как и следовало ожидать, выражение справа не зависит от значения n, и все частицы действительно вращаются с одинаковой частотой. Дисперсионное уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\omega^2 - \Omega\omega + s_1\nu^2/4 = 0, \;\; \omega^2 = (1/2)(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - s_1\nu^2}), \tag{3}$$

где

$$s_l(N) \equiv \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin^2(\pi k l/N)}{\sin^3(\pi k/N)} = 4 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1-\eta^{lk}}{|1-\eta^k|^3}.$$

Здесь, как и в случае замагниченного столба электронов [5], существуют две частоты вращения. Имеется ограничение $\lambda \geq s_1$, которое означает, что при заданном магнитном поле радиус окружности должен быть достаточно велик. Случай $\lambda \gg s_1$ отвечает дрейфовому приближению. Случай $\lambda = s_1$ мы назовем бриллюэновским пределом. Перейдем теперь к исследованию устойчивости.

Проварьировав уравнение (1), получим:

$$\delta\ddot{z}_n + i\Omega\delta\dot{z}_n + \frac{q^2}{2m}\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\delta z_n - \delta z_k}{|z_n - z_k|^3} + \frac{3q^2}{2m}\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{(z_n - z_k)^2}{|z_n - z_k|^5}\overline{(\delta z_n - \delta z_k)} = 0.$$

Полагая $z_n = \eta^n(R + w_n)\exp(-i\omega t)$, где $|w_n| \ll R$, и подставляя соответствующую вариацию, находим:

$$\ddot{w}_n + i(\Omega - 2\omega)\dot{w}_n + (-\omega^2 + \Omega\omega)w_n + (1/2)\,\nu^2 \sum\nolimits'^{N}_{k=1} \frac{w_n - \eta^{k-n}w_k}{|1-\eta^{k-n}|^3} +$$
$$+ (3/2)\,\nu^2 \sum\nolimits'^{N}_{k=1} \frac{(1-\eta^{k-n})^2}{|1-\eta^{k-n}|^5}\overline{(w_n - \eta^{k-n}w_k)} = 0. \tag{4}$$

Ключевым моментом в упрощении этого уравнения является то, что w_n можно рассматривать как периодическую функцию n. Например, такой функцией является η^n, ее степени η^{ln} и их линейные комбинации. На самом деле можно показать, что существует однозначное разложение $w_n = \sum_{l=0}^{N-1} \mu_l\,\eta^{ln}$, являющееся дискретным вариантом обычной теоремы Фурье для периодических функций.

Такое разложение позволяет рассматривать возмущения в виде отдельных гармоник. Рассмотрим возмущение в виде комбинации двух сопряженных гармоник l и $N - l$:

$$w_n = u\eta^{ln} + \bar{v}\eta^{-ln}, \tag{5}$$

где u, v пока произвольные функции времени.

Очевидно, можно считать $l \leq N/2$. Чтобы определить u и v, подставим (5) в (4), выразим все возникающие суммы через $s_l(N)$ и получим следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{u} + i(\Omega - 2\omega)\dot{u} + \tfrac{1}{4}\nu^2(s_1 + \tfrac{1}{2}s_{l+1})u + \tfrac{3}{8}\nu^2(s_1 - s_l)v = 0 \\ &\ddot{v} - i(\Omega - 2\omega)\dot{v} + \tfrac{1}{4}\nu^2(s_1 + \tfrac{1}{2}s_{l-1})v + \tfrac{3}{8}\nu^2(s_1 - s_l)u = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Для определенности выберем в уравнении для частоты (3) знак минус, тогда $\Omega - 2\omega = \nu\sqrt{\lambda - s_1}$. Удобно измерять инкремент в единицах ν, поэтому, положив $u, v \sim \exp(-i\nu\Gamma t)$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\Gamma^2 + \Gamma\sqrt{\lambda - s_1} + \frac{1}{4}(s_1 + \frac{1}{2}s_{l+1}) & \frac{3}{8}(s_1 - s_l) \\ \frac{3}{8}(s_1 - s_l) & -\Gamma^2 - \Gamma\sqrt{\lambda - s_1} + \frac{1}{4}(s_1 + \frac{1}{2}s_{l-1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Выбор другого знака в уравнении (3) эквивалентен замене $\Gamma \to -\Gamma$, так что действительно достаточно рассмотреть только одну частоту вращения многоугольника. Пусть:

$$t = \sqrt{\lambda - s_1}, \quad a = s_1/4 + s_{l+1}/8, \quad b = s_1/4 + s_{l-1}/8, \quad c = 3(s_1 - s_l)/8.$$

Вычислив определитель, получаем следующее уравнение:

$$\Gamma^4 - (t^2 + a + b)\Gamma^2 - t(a - b)\Gamma + (ab - c^2) = 0. \tag{7}$$

Это уравнение четвертой степени относительно неизвестного инкремента Γ. Оно зависит от параметра $t \geq 0$, связанного с магнитным полем. Числа a, b, c выражаются через $s_l(N)$, то есть зависят от числа частиц N и моды l, причем $0 \leq l \leq N/2$. Приступим к его исследованию.

Мода $l = 0$.

В этом случае $a = b = c$, и дисперсионное уравнение имеет только устойчивые корни. Физически они связаны с такими деформациями многоугольника, при которых он сохраняет свою форму, то есть с поворотом и растяжением. Таким образом, при любом N мода $l = 0$ устойчива.

Мода $l = 1$.

В этом случае $c = 0$, и уравнение четвертой степени (7) распадается на произведение двух квадратных уравнений с вещественными корнями. Эта мода также устойчива при любом N.

Исследовать в общем случае другие моды затруднительно, но из уже сказанного вытекает, что при $N < 4$ система устойчива, а при $N = 4$ надо рассмотреть только

$l = 2$. Тогда уравнение (7) становится биквадратным, и имеет устойчивые корни при любом t. Таким образом, четырехугольник устойчив. Для $N = 5$ опять достаточно рассмотреть $l = 2$. Вычисления показывают, что эта мода устойчива при всех t.

Перейдем к $N = 6$, достаточно рассмотреть $l = 2, 3$. Мода $l = 2$ снова всегда устойчива. Для $l = 3$ получаем:

$$\Gamma^4 - (t^2 + 11/2 + \sqrt{3})\Gamma^2 + 29(4\sqrt{3} - 7)/16 = 0.$$

Отсюда видно, что шестиугольник неустойчив при любом значении магнитного поля. Дальнейшие расчеты показали, что конфигурации с $N \geq 6$ неустойчивы, причем с ростом N критерий неустойчивости выполнялся со все большим запасом, а также увеличивалось число неустойчивых мод.

Аналитически критерии устойчивости можно получить в двух простых предельных случаях, слабого и сильного магнитных полей.

$$\text{Бриллюэновский предел} \quad t = 0: \qquad \sqrt{ab} \geq |c|. \tag{8}$$

$$\text{Дрейфовый предел} \quad t \to \infty: \qquad \frac{a+b}{2} \geq |c|. \tag{9}$$

Анализ (8), (9) подтверждает сделанные выводы. Отметим, что увеличение магнитного поля вообще говоря приводит к стабилизации. Это проявляется хотя бы в том, что при $t \to \infty$ инкремент неустойчивости стремится к нулю. Кроме того, очевидно, критерий (9) удовлетворяется легче чем (8). Например, при $10 \leq N \leq 12$ оказывается, что мода с $l = 2$ неустойчива в бриллюэновском пределе и устойчива в дрейфовом. Однако на число N, начиная с которого конфигурация зарядов в виде правильного многоугольника неустойчива, величина магнитного поля не влияет.

Подведем итоги. Мы рассмотрели частное решение плоской задачи о движении N одинаковых кулоновских частиц в магнитном поле в виде правильного вращающегося N-угольника. Таковой оказался устойчивым при $N \leq 5$ и неустойчивым в противном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bollinger J. J., Wineland D. J., Dubin D. H. E. Phys. Plasmas, 1, N 5, 1403 (1994).

[2] Л а м б Г. Гидродинамика. М.-Л., Огиз-Гостехиздат, 1947.
[3] K e l v i n W. Mathematical and Phisical papers, v. IV, Cambridge, 1910.
[4] T o m p s o m J. J. On the Motion of Vortex Rings. London, 1883.
[5] Л е й м а н В. Г. Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, N 8, 15 (1967).
[6] Д е в и д с о н Р. Теория заряженной плазмы. М., Мир, 1978.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 8 апреля 1996 г.