УДК 530.1

РАВНОВЕСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. С. Харитонов, Л. А. Шелепин

Рассмотрены свойства равновесных распределений для немарковских процессов. Показана фундаментальная роль в этих распределениях чисел Фибоначчи и правила "золотого сечения". Обсуждаются области приложений.

По сравнению с марковскими процессами описание немарковских существенно осложняется ввиду необходимости учета предыстории системы. Это описание, как показано в [1], включает в себя как существенную составляющую негэнтропию (и информацию). В данной работе на ее основе будут проанализированы равновесные распределения в немарковских системах.

Для марковских процессов вероятностная картина поведения системы в будущем определяется ее состоянием в момент времени t_0 и не изменится от дополнительных сведений о событиях при $t < t_0$. В дискретном случае можно записать

$$u_{n+1} = f(u_n), \tag{1}$$

где u_n, u_{n+1} – последовательные значения некоторой величины. Для немарковских процессов существенна зависимость от предыстории. Простейший возможный пример такой зависимости дается соотношением

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \tag{2}$$

Здесь величина u зависит не только от предыдущего состояния, как в (1), но и от событий при $t < t_0$. Конечно, могут быть как более сильные зависимости от предыстории, распространяющиеся на большее число шагов назад, типа, например, генетической информации, о которых можно говорить как о "дальней памяти", так и слабые зависимости, на доли шага ("ближняя память"). Соотношение (2) может рассматриваться как стандартное, задающее определенную границу между "дальней" и "ближней памятью". Для случая, когда u – целые числа, и при $u_1 = u_2 = 1$ решением (2) являются числа Фибоначчи. Именно предельная простота зависимости (2) и обуславливает выделенность чисел Фибоначчи, нашедших обширные применения в теории чисел, цепных дробей, геометрии, теории поиска [2]. В ряду Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... отношение соседних элементов стремится (при $n > 13$) к золотому сечению [2].

Теория немарковских процессов, связанных со структурными изменениями, является адекватной для описания биологических, экономических, социальных явлений, которые зависят от предыстории. Ранее отмечалась глубокая параллель между энергией и негэнтропией [3]. Для марковских процессов равновесное состояние определяется больцмановским распределением по энергии E, которое, например, для заселенностей энергетических уровней N имеет вид

$$N = N_0 \exp(-E/kT). \tag{3}$$

Как существенный равновесный параметр в (3) входит температура T. Для немарковских процессов равновесие определяется негэнтропией S. Как отмечалось, например, в [4], равновесное распределение биомассы W в трофических цепях биоценоза может быть записано в виде соотношения, аналогичного (3)

$$W = W_0 \exp(-S/\theta). \tag{4}$$

Это соотношение естественным образом возникает и при других немарковских процессах. Величина θ в (4) соответствует некоторой "структурной" температуре, которая определяется характерным объемом памяти о прошлом или своего рода негэнтропийным (информационным) полем. При больших θ возникают сложные иерархические структуры в широком диапазоне S, при малых θ – структуры в малом диапазоне, а при $\theta \to 0$, т.е. отсутствии информации о прошлом, происходит предельный переход к марковским процессам.

Обратимся к стандартному соотношению (2) и рассмотрим условия совместимости (2) и (4), что даст соответствующее этому случаю значение θ. Представим экспоненту в дискретном виде как геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \ldots$ ($q = \exp(-\theta^{-1})$). Чтобы она была решением (2), необходимо выполнение при любом n соотношения $q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$ или

$$1 + q = q^2. \tag{5}$$

Корни этого уравнения, задающие искомое значение θ, равны

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

Это – широко известные значения золотого сечения [2], а соответствующие равновесные распределения (4) с θ, определяемыми величинами α и β в (6), могут играть роль эталонных распределений при анализе немарковских процессов. Для любых других зависимостей от прошлого типа $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots)$ возникают свои уравнения типа (5) и свои (с другими значениями θ) равновесные функции (4). В общем случае равновесные распределения немарковских систем задают границы их устойчивости и определяют соотношение между статистическими мерами хаоса и порядка.

Немарковские процессы можно образно определить как процессы преобразования структур. Ряд аспектов таких процессов рассматривается в синергетике. Это – проблемы неустойчивостей однородных состояний, возникновения бифуркаций, структурных переходов [5]. Для немарковских процессов характерны не отдельные индивидуальные переходы между конкретными структурами, а образование единых иерархических систем, представляющих собой цепочки взаимосвязанных структурных переходов, находящихся в некотором диапазоне негэнтропии S. Такие иерархические системы возникают в любых по-существу немарковских объектах: биоценозах и популяциях, стадах и стаях, социально-экономических структурах и коллективах людей.

Таким образом, можно сказать, что мы имеем дело с качественно новой областью исследований, где равновесные распределения (4) являются адекватным методом анализа. Здесь может быть также использован с некоторой модификацией ряд положений теории марковских процессов. Так, принцип детального равновесия, задающий связь между вероятностями прямых и обратных переходов, может быть записан как соотношение между вероятностями обмена информацией (негэнтропией) $w(\Delta I_{ab})$ и $w(\Delta I_{ba})$ различных уровней иерархии a и b:

$$w(\Delta I_{ab})/w(\Delta I_{ba}) = \exp[(S_b - S_a)/\theta]. \tag{7}$$

Для анализа конкретных иерархических систем необходимо наличие набора эмпирических данных. Сопоставление экспериментальных кривых с распределениями типа (4) позволяет оценить степень отклонения от равновесия, дать ориентировку в определенной совокупности процессов, оценить число ступеней в иерархии, найти критерии неблагополучия в проблемах социально-экономической сферы. В науке о поведении животных – этологии, сопоставляя иерархические структуры в сообществах, можно сравнивать объемы используемой ими информации.

При анализе экономики можно использовать определенные биологические аналогии. Промышленность, ранжированную по сложности производства, можно рассматривать как иерархическую систему типа биоценоза [4], где инвестиции – аналог биомассы, потребление – диссипации. Здесь может быть успешно применен метод золотого сечения.

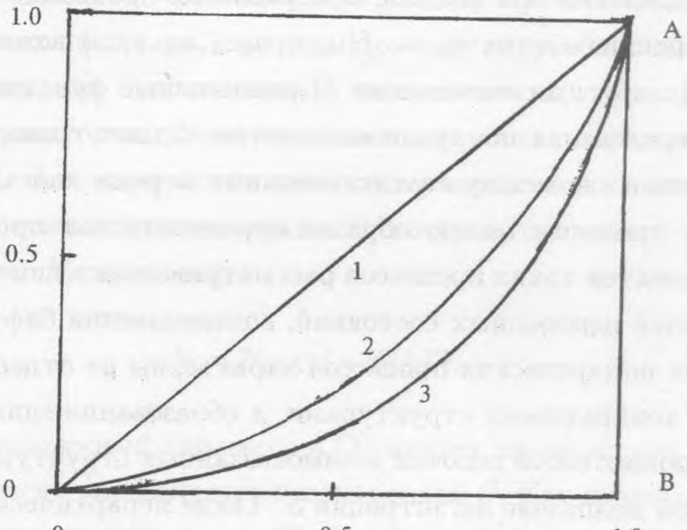

Рис. 1. *Кривые Лоренца для распределения доходов: равномерное распределение (1), Мексика (2), США (3).*

Рассмотрим в качестве примера схему распределения дохода населения, отображающую степень социального расслоения общества. Она характеризуется кривой Лоренца [6]. На рис. 1 по оси абсцисс отложена доля семей (в %), по оси ординат – процент совокупного дохода. Диагональ OA (кривая 1) соответствует равномерному распределению, когда 10% семей имеют 10% дохода, 20% имеют 20% и т.д. Другому предельному положению, когда все общественное богатство принадлежит узкому кругу лиц, соответствует ломаная линия OBA. Распределение дохода в Мексике и США задается кривыми 3 и 2. Последняя весьма близка к кривой, соответствующей правилу золотого сечения.

Правило золотого сечения может быть в принципе применено не только для распределений, но и для оценки состояния системы в целом. Типичный пример рассмотрен в [7], где проведен анализ соотношения доходов и расходов в субъектах Российской Федерации. Хотя правило золотого сечения относится, как было показано выше, не к точке, а к кривой, но в принципе, с учетом ошибки, возникающей при усреднении по распределению типа (4), такой подход может быть использован как критерий состояния социально-экономических условий. Для неравновесных же распределений необходимо учитывать дополнительные потоки негэнтропии (информации) подобно тому, как в атомно-молекулярных системах для существования неравновесных стационарных распределений требуются дополнительные потоки энергии.

Авторы выражают благодарность РФФИ (грант N 96-06-80461) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Харитонов А. С., Шелепин Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 21 (1996).

[2] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М., Наука, 1969.

[3] Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М., ГИФМЛ, 1960.

[4] Быстрова Т. В., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **218**, 60 (1994).

[5] Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М., Мир, 1985.

[6] Азроянц Э., Колмаков И., Харитонов А. Правила игры, N 1, 107 (1995).

[7] Веденеев Б., Харитонов А. Правила игры, N 2, 59 (1995).

Поступила в редакцию 26 июня 1996 г.