УДК 530.145 + 535.33

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДЕЙСТВИИ: КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАНТОВОГО СВЕТА

В. П. Карасев

С помощью формализма обобщенных когерентных состояний группы $SU(2)_p$ определены структурные свойства поляризационных квазираспределений (Q- и P-функций) и вычислены характеристические функции для моментов компонент поляризационного квазиспина (операторов Стокса), что обеспечивает квазиклассическое описание поляризации квантового света.

Как хорошо известно, различные типы функций квазивероятности (Q- и P-функции, функции Вигнера), определяемые с помощью оператора плотности ρ и (обобщенных) когерентных состояний, вместе с Q- и P-представлениями операторов произвольных физических величин, широко используются для квазиклассического описания квантовых систем [1, 2]. В работах [3–5] были определены и исследованы поляризационные когерентные состояния (ПКС) $|\theta, \varphi; \psi_0>$, порождаемые действием операторов сдвига $D(g(\xi)) = \exp(\xi P_+ - \xi^* P_-) \equiv S_P(\xi)$ группы $SU(2)_p$ поляризационной инвариантности световых полей на некоторые эталонные векторы $|\psi_0>$ квантовых состояний света, где $\xi(\mathbf{n}) = -\theta e^{-i\varphi}/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ – единичный вектор, задающий положение вектора поляризационного (P) квазиспина (вектора Стокса) $<\mathbf{P}> = (<P_1>, <P_2>, <P_0>)$ на сфере Пуанкаре – поляризационном фазовом пространстве света [6] ($<A> = Tr[\rho A]$ – квантовые средние оператора A в состояниях ρ). В работах [4, 5] с помощью этих ПКС были определены полные и редуцированные поляризационные Q-функции, а также вычислены некоторые характеристические функции. Ниже, развивая с помощью техники ПКС результаты [4, 5], мы получаем все необходимое [2] для квазиклассического описания поляризационных свойств квантовых световых полей, включая $SU(2)_p$-тензорную ("мультипольную") структуру Q- и P-функций и характеристические функции компонент P-квазиспина.

Поляризационные функции квазивероятности: общие определения и свойства. Обобщая естественным образом понятия Q- и P-функций для спиновых систем [2], можно определить полные поляризационные $(SU(2)_p)$ Q- и P-функции $Q(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda)$ и $P(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda)$ следующим образом:

$$\rho = \sum_{p,[n(i)],\lambda} \frac{2p+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} P_\rho(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda) d\varphi |\theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda >< \theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda|, \tag{1a}$$

$$Q_\rho(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda) \equiv Tr[\rho|\theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda >< \theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda|] = \\ =< \theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda|\rho|\theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda >, \tag{1b}$$

где $\{|\theta, \varphi; p, [n(i)], \lambda >\}$ – сверхполная система ПКС, порождаемых старшими векторами $|p, \mu = p; [n(i)], \lambda >$ $SU(2)_p$-неприводимых подпространств (с фиксированными значениями P-квазиспина p, его третьей проекции μ, чисел фотонов $n(i)$ в i-ой пространственно-временной (ПВ) моде, $i = 1, ..., m$, и некоторых дополнительных индексов λ) как эталонными векторами [4], ρ – полные операторы плотности световых полей на $2m$-модовом фоковском пространстве $L_F(2m)$, которые в ортонормированном базисе $\{|p, \mu; [n(i)], \lambda >\}$ задаются рядами

$$\rho = \sum C^{p',\mu',[n(i)'],\lambda'}_{p,\mu,[n(i)],\lambda}(\rho)|p, \mu; [n(i)], \lambda >< p', \mu'; [n(i)'], \lambda'| \tag{2}$$

(по дважды повторяющимся индексам – суммирование). Альтернативные к (1) определения полных Q- и P-функций могут быть даны с помощью системы ПКС $|\{\alpha_i^+(\theta,\varphi), \alpha_i^-(\theta,\varphi)\} >$, порождаемых действием $S_P(\xi)$ на глауберовские КС $|\{\tilde{\alpha}_i^+, \tilde{\alpha}_i^-\} >$, соответствующие начальному положению P-квазиспина на северном полюсе сферы Пуанкаре: $< P_1 >= 0 =< P_2 >, < P_0 >= R_P \neq 0$ (R_P – радиус сферы Пуанкаре); однако мы их не выписываем, поскольку они совпадают с обычными Q- и P-функциями [1] электромагнитных полей (но с явно выраженной зависимостью от углов (θ, φ)) [5].

Поскольку $SU(2)_p$ P- и Q-функции (1) зависят от углов (θ, φ), они могут быть разложены в ряды по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ [7]:

$$(P/Q)_\rho(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda) = \sum_{lm} \rho^{(P/Q)}_{lm}(p, [\mathbf{n}(i)], \lambda) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3}$$

(символ (P/Q) означает P или Q). "Мультипольные" разложения (3) характеризуют свойства ρ как $SU(2)_p$-тензорных операторов. Для заданных $(Q/P)_\rho(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda)$ коэффициенты $\rho^{(Q/P)}_{lm}(p, [n(i)], \lambda)$ в них вычисляются стандартным способом [6]:

$$\rho_{lm}(p,[n(i)],\lambda)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta f_\rho(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)Y^*_{lm}(\theta,\varphi), \tag{4}$$

где $f_\rho(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)=Q_\rho(\mathbf{n};p,[n(i),\lambda)$ или $P_\rho(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)$. Явный вид коэффициентов (4) легко находится с помощью разложений (2) для ρ и соответствующей теоретико-групповой техники [2, 7]; например, для Q-функций таким путем получаем

$$\rho^Q_{lm}(p,[n(i)],\lambda)=\frac{\sqrt{(2l+1)4\pi}}{2p+1}\sum_{\mu,\mu'}C^{p,\mu',[n(i)],\lambda}_{p,\mu,[n(i)],\lambda}<p,\mu';l,m|p,\mu><p,p;l,0|p,p>, \tag{5}$$

где $<p,\nu';l,m|p,\nu>$ – коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$ [7]. Аналогичные (5) выражения можно получить и для P-функций (см. [2]).

Итак, мы нашли различные представления для полных поляризационных Q- и P-функций, пригодных как для характеризации поляризационных свойств световых пучков, так и для вычисления средних значений $<A(\{P_\alpha\})>$ поляризационных операторов $A(\{P_\alpha\})$ по формулам типа

$$<A>\equiv Tr[\rho A]=\sum_{p,[n(i)],\lambda}\frac{(2p+1)}{(4\pi)}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_\rho(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)\sin\theta d\theta d\varphi Q_A(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda), \tag{6}$$

где $Q_A(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)\equiv<\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda|A|\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda>$ $-Q$-представление оператора $A(\{P_\alpha\})$ [2]. (Можно также использовать аналог соотношения (6), определяемый с помощью $Q_\rho(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)$ и $P_A(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)$; однако вычисление $P_A(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)$ для произвольных операторов A более трудоемко по сравнению с $Q_A(\mathbf{n};p,[n(i)],\lambda)$.) В то же время, чтобы получить "чисто поляризационный квазиклассический фазовый портрет" светового поля в состоянии ρ, достаточно использовать редуцированные Q-функции $Q^p_\rho(\varphi,\theta)$, получаемые суммированием или интегрированием по $SU(2)_p$-инвариантным индексам в полных Q-функциях. В частности, Q^p-функции, соответствующие полным Q-функциям (2), определяются следующим образом [4]:

$$Q^p_\rho(\theta,\varphi)=\sum_{p,[n(i)],\lambda}<\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda|\rho|\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda>=\sum_{lm}q_{lm}(\rho)Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{7a}$$

где $q_{lm}(\rho)=\sum_{p,[n(i)],\lambda}\rho^Q_{lm}(p,[n(i)],\lambda)$. В то же время Q^p-функции, определяемые с помощью глауберовских КС, в случае одной ПВ моды вычисляются по формуле:

$$Q^p_\rho(\theta,\varphi)=\int\limits_0^\infty rdr\int\limits_0^{2\pi}d\xi<\alpha^+(\theta,\varphi),\alpha^-(\theta,\varphi)|\rho|\alpha^+(\theta,\varphi),\alpha^-(\theta,\varphi)>=\sum_{lm}q_{lm}(\rho)Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{7b}$$

где $q_{lm}(\rho)=\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}d\xi\rho^Q_{lm}(\alpha)$, $\tilde\alpha^+=\alpha=r\exp(i\xi)$, $\tilde\alpha^-=0$ и $\rho^Q_{lm}(\alpha)$ – аналоги коэффициентов (4) в (3). Очевидно, в случае одной ПВ моды результаты (7a) и (7b) одинаковы.

Поляризационные функции квазивероятности; примеры и применения. Для иллюстрации полученных выше общих соотношений определим $SU(2)_p$ квазираспределения для некоторых конкретных операторов плотности ρ.

Поляризационные Q^p-функции для общих состояний ПКС. В качестве первого примера вычислим Q^p-функции типа (7a) для чистых состояний $\rho_1=|\psi_1><\psi_1|$, задаваемых ПКС $|\theta',\varphi';p',\mu',[n(i)'],\lambda'>=|\psi_1>$ с произвольным базисным вектором $|p',\mu';[n(i)'],\lambda'>$ в качестве эталонного [5]. Тогда, подставляя ρ_1 в (2) и используя теоретико-групповые правила умножения двух операторов $S_P(\xi)$ [2, 5], находим

$$Q^p(\theta,\varphi;\rho_1)=2^{-2p'}\left[\frac{(2p')!}{(p'+\mu')!(p'-\mu')!}\right](1+\mathbf{nn}')^{p'+\mu'}(1-\mathbf{nn}')^{p'-\mu'}, \tag{8}$$

где $\mathbf{nn}'=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi)$ – косинус угла между двумя положениями вектора Стокса на сфере Пуанкаре. Аналогично, для чистых состояний $\rho_2=|\psi_2><\psi_2|$, задаваемых глауберовскими ПКС $|\{\alpha_i^+(\theta',\varphi'),\alpha_i^-(\theta',\varphi')\}>=|\psi_2>$, в случае двух ПВ мод получаем

$$Q^p(\theta,\varphi;\rho_2)=[1-|[\alpha_1\alpha_2]|^2/Z^2\exp(-<|N|>+Z+|[\alpha_1\alpha_2]|^2/Z),$$

$$Z=<|N|>/2+R_P\mathbf{n}'\mathbf{n},\ R_P\equiv\sqrt{\sum_{i=1,2,0}(<P_i>)^2}=<P_0>,\ [\alpha_1\alpha_2]=\tilde\alpha_1^+\tilde\alpha_2^--\tilde\alpha_1^-\tilde\alpha_2^+, \tag{9a}$$

где квантовые средние полного числа фотонов $<|N|>$ и компонент квазиспина $<|P_\alpha|>$ задаются выражениями

$$<|N|>=\sum_j\{|\tilde\alpha_j^+|^2+|\tilde\alpha_j^-|^2\},\ 2<P_0>=\sum_j\{|\tilde\alpha_j^+|^2-|\tilde\alpha_j^-|^2\},$$

$$2<|P_1|>=\sum_j[\tilde\alpha_j^-(\tilde\alpha_j^+)^*+(\tilde\alpha_j^-)^*\tilde\alpha_j^+],\ 2<|P_2|>=i\sum_j[\tilde\alpha_j^-(\tilde\alpha_j^+)^*-(\tilde\alpha_j^-)^*\tilde\alpha_j^+] \tag{9b}$$

и, кроме того, в (9a) учтено определяющее условие $<P_1>=0=<P_2>,<P_0>=R_P\neq0$ для эталонных векторов глауберовских ПКС. Как видно из (8), (9), угловые зависимости полученных Q^p-функций задаются косинусами $\mathbf{nn}'$. В силу полноты обеих систем ПКС формулы (8) и (9) могут быть использованы для вычисления Q^p-функций в произвольных чистых квантовых состояниях света.

Поляризационные квазираспределения для неполяризованного света. Весьма яркие примеры применения поляризационные квазираспределения находят в качестве индикаторов различных классов неполяризованного света (НПС).

Как известно [6], обычное определение НПС можно задать (на языке P-квазиспина) с помощью условий

$$< P >= R_P \mathbf{n} = 0 : < P_{i=1,2,0} >= 0, \tag{10}$$

где $< P_i >$ – квантовые или статистические средние. Условия (10) фиксируют лишь первые моменты компонент P-квазиспина (вектора Стокса), но ничего не говорят о высших статистических моментах, которые важны для характеристики поляризационной структуры света в квантовой оптике [5, 8]. Поэтому в работах [9, 10] было предложено использовать для НПС более сильные определения, связанные со свойствами инвариантности произвольных P_α-зависимых величин $< A(\{P_\alpha\}) >$. Это позволило в [10] ввести два класса неполяризованного света: НПС I и НПС II, сохраняющие некоторые свойства естественного (теплового) НПС. (Следует отметить, что, хотя авторы [10] не связывали свои определения с новыми (по сравнению с обычной рандомизацией) механизмами деполяризации света, эти два класса НПС имеют в квантовой оптике своих представителей в чистых состояних (P- и P_0-скалярный бифотонный свет), которые порождаются за счет жесткой фазовой синхронизации пар фотонов [3, 8].)

В рамках квантовой оптики определения НПС I и II могут быть заданы на языке P-квазиспина следующим условием инвариантности

$$Tr[S\rho S^\dagger A(\{P_\alpha\})] = Tr[\rho A(\{P_\alpha\})] \text{ или } S\rho S^\dagger = \rho, \tag{11}$$

где $< A(\{P_\alpha\}) >$ – произвольная P_α-зависимая величина. Унитарные операторы S соответствуют произвольным элементам группы $SU(2)_p$ в случае НПС I: $S = \exp(ib_0P_0 + b_1P_+ - b_1^*P_-)$ и специальным $SU(2)_p$-элементам $S = \exp(i\eta_0P_0)\exp(i\pi P_2)$ в случае НПС II. Отметим, что в силу $SU(2)_p$-трансформационных свойств [5, 7] компонент квазиспина условие (10) в обычном определении НПС эквивалентно первому соотношению в (11) с $S = \exp(ib_0P_0 + b_1P_+ - b_1^*P_-)$, где, однако, $A(\{P_\alpha\})$ – лишь любая линейная комбинация компонент P_α.

Второе соотношение из (11) в силу $SU(2)$-трансформационных свойств базисных волновых векторов и сферических функций влечет определенные ограничения на мультипольную структуру (3) соответствующих Q- и P-функций. Так, для НПС I коэффициенты (4) имеют вид

$$\rho_{lm}^{(Q/P)}(p,[n(i)],\lambda)=\delta_{l,0}\delta_{m,0}\tilde{\rho}^{(Q/P)}(p,[n(i)],\lambda), \tag{12a}$$

показывающий, что в этом случае ряды (3) содержат лишь $SU(2)_p$-скалярные сферические функции $Y_{00}(\theta,\varphi)=1/2\sqrt{\pi}$. Поэтому вместо бессодержательного названия "НПС I" целесообразно использовать для соответствующих состояний термин "P-инвариантный НПС" (сохраняя термин "P-скалярный свет" [8] для уникального подмножества этого класса, порожденного P-скалярными бифотонами $X_{ij}^{+}\equiv\alpha_{+}^{+}(i)\alpha_{-}^{+}(j)-\alpha_{+}^{+}(j)\alpha_{-}^{+}(i)$). Аналогично, для НПС II коэффициенты (4) имеют вид

$$\rho_{lm}^{Q/P}(p,[n(i)],\lambda)=\delta_{m,0}\tilde{\rho}_{l}^{(Q/P)}(p,[n(i)],\lambda), \tag{12b}$$

показывающий, что в этом случае разложения (3) содержат лишь φ-независимые сферические функции $Y_{l0}(\theta,\varphi)=\sqrt{(2l+1)/4\pi}P_l(\cos\theta)$ ($P_l(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра). Поэтому целесообразно состояния НПС II называть P_0-инвариантным НПС (сохраняя термин "P_0-скалярный свет" [8] для подмножества этого класса, порожденного P_0-скалярными бифотонами X_{ij}^{+} и $Y_{ij}^{+}\equiv\frac{1}{2}(a_{+}^{+}(i)a_{-}^{+}(j)+a_{+}^{+}(j)a_{-}^{+}(i))$. Отметим, что мультипольная структура (12), могущая быть использованной для индикации обоих типов НПС, не выявляется с помощью обычных Q-функций, полученных в [9, 11].

В качестве примеров выпишем Q-функции для наиболее ярких и экспериментально реализуемых представителей обоих классов: 1) P-скалярных состояний $|\zeta>_{\mathrm{x}_{12}}=\exp(\zeta X_{12}^{+}-\zeta^{*}X_{12})|0>$, $\zeta=|\zeta|\exp(i\phi)$ и 2) P_0-скалярных "твин-фотонных" состояний $|\zeta>_{\mathrm{y}_{11}}=|\zeta|\exp(i\phi)>_{\mathrm{y}_{11}}=\exp(\zeta Y_{11}^{+}-\zeta^{*}Y_{11})|0>$. Тогда согласно определению (1b), соответственно, находим

$$Q_{x_{12}}(\theta,\varphi;p,[n(i)])=\delta_{p,0}\delta_{n(1),n(2)}[\mathrm{ch}|\zeta|]^{-4}(n(1)+1)[\mathrm{th}|\zeta|]^{n(1)+n(2)},\ Q_{x_{12}}^{p}(\theta,\varphi)=1, \tag{13a}$$

$$Q_{y_{11}}(\theta,\varphi;p=n(1)/2)=[\mathrm{ch}|\zeta|]^{-2}[\mathrm{th}|\zeta|]^{2p}(2p)![p!]^{-2}4^{-p}(\sin\theta)^{2p}. \tag{13b}$$

Для сравнения выпишем Q^p-функцию

$$Q_{th(1)}^{p}(\theta,\varphi)=1-\exp(-\beta)=2(<N>+2)^{-1} \tag{14a}$$

для состояний теплового равновесия в случае одной ПВ моды (с оператором плотности $\rho_{th}(1) = [1-\exp(-\beta)]^2 \sum_{n,\mu} \exp(-n\beta)|p,\mu >< p,\mu|$, $p = n/2$, $\beta = (kT)^{-1}$), а также Q-функцию

$$Q_{\tilde{y}_{11}}(\theta,\varphi; p = n(1)/2) = [\mathrm{ch}|\zeta|]^{-2}[\mathrm{th}|\zeta|]^{2p}(2p)![p!]^{-2}4^{-p}(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)^p \tag{14b}$$

для твин-фотонных состояний $|\zeta>_{\tilde{y}_{11}} = \exp(\zeta\tilde{Y}_{11}^{+} - \zeta^*\tilde{Y}_{11})|0>$, $\tilde{Y}_{11}^{+} = a_x^+ a_y^+$, $a_x^+ = (a_-^+ - a_+^+)2^{-1/2} a_y^+ = i(a_-^+ + a_+^+)2^{-1/2}$. Отметим, что различие между (13a) и (14a) проявляется в значениях высших моментов для двух представителей P-инвариантного НПС [5], а сравнение (13b) и (14b) демонстрирует различие мультипольных разложений (3) P_0-скалярного и P_0-неинвариантного типов НПС.

Поляризационные характеристические функции. Для вычисления средних значений $< A(\{P_\alpha\}) >$ поляризационных операторов $A(\{P_\alpha\})$ по формуле (6) необходимо иметь Q-представления $Q_A(\mathbf{n}; p, [n(i)], \lambda)$ произвольных операторов $A(\{P_\alpha\})$. Их удобно вычислять с помощью поляризационных характеристических функций [2, 5]

$$\chi^{\psi_0}_{\{P_\alpha\}}(\{\nu_i\}) =< \theta,\varphi;\psi_0| \prod_i \exp(\nu_i P_i)|\theta,\varphi;\psi_0 >, \tag{15}$$

где экспоненты берутся в определенном порядке, а явный вид правых частей (15) находится с помощью правил композиции операторов группы $SU(2)$ [2, 7]. Имея также в виду, что использованные выше ПКС могут быть рассмотрены как производящие функции для ортонормальных базисных состояний $|p',\mu';[n(i)'],\lambda' >$ [5], достаточно ограничиться вычислением некоторых базисных характеристических функций $\chi^{\psi_0}_{P_\alpha}(\nu_\alpha)$ (с фиксированными значениями α) для ПКС $|\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda >$ и $|\{\alpha_i^+(\theta,\varphi), \alpha_i^-(\theta,\varphi)\} >$.

Тогда, используя определения $2P_1 = (P_+ + P_-)$, $2P_2 = i(P_+ - P_-)$ [8], находим

$$\chi^p_{P_\alpha}(\nu_\alpha) \equiv< \theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda|\exp(\nu_\alpha P_\alpha)|\theta,\varphi;p,[n(i)],\lambda >=$$
$$= \left[\cos\frac{\tau}{2} + i\frac{< |P_\alpha(\theta,\varphi)| >}{p}\sin\frac{\tau}{2}\right]^{2p}, \ \alpha = 0,1,2,$$

$$< |P_0(\theta,\varphi)| >= p\cos\theta, < |P_1(\theta,\varphi)| >= -p\sin\theta\cos\varphi, < |P_2(\theta,\varphi)| >= p\sin\theta\sin\varphi, \tag{16}$$

где $\nu_\alpha = i\tau$, τ – вещественный параметр. Аналогично, для $2m$-модовых глауберовских КС получаем

$$\chi^{Gcs}_{P_\alpha}(\nu_\alpha = i\tau) \equiv< \{\alpha_j^+(\theta,\varphi), \alpha_j^-(\theta,\varphi)\}|\exp(\nu_\alpha P_\alpha|\{\alpha_j^+(\theta,\varphi), \alpha_j^-(\theta,\varphi)\} >=$$

$$= \exp[(\cos(\tau/2) - 1) < |N| >] \exp[(-1)^\alpha 2i \sin(\tau/2) < |P_\alpha| >, \alpha = 0, 1, 2, \tag{17}$$

где $< |N| >, < |P_\alpha| >$ задаются формулами (9b), но с $\alpha_j^\pm(\theta, \varphi)$ вместо $\tilde{\alpha}_j^\pm$.

В заключение отметим, что полученные формулы вполне достаточны для изучения поляризационных свойств квантового света на квазиклассическом уровне. В частности, характеристические функции (15) – (17) и квазираспределения (1), (7) можно использовать для исследования проблемы сжатия поляризационных переменных P_i [5, 8]. Этот и другие аспекты квазиклассического описания поляризационных состояний света, включая характеризацию различных типов НПС, требуют отдельного анализа. Кроме того, введенные в [3 – 5] ПКС могут быть применены для определения структуры поляризационных геометрических фаз, приобретаемых векторами квантовых состояний света в процессе эволюции под действием поляризационных гамильтонианов [12].

Автор благодарен проф. Х. Паулю (Гумбольдтовский университет, Берлин) за полезные обсуждения и предоставление возможности ознакомиться с работами [10, 11] до их опубликования. Работа выполнена при поддержке Фонда научно-технической программы "Фундаментальная спектроскопия".

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cahill K. E., Glauber R. J. Phys. Rev., **177**, 1882 (1969). Hillery M., O'Connell R. F., Scully M. O., and Wigner E. P. Phys. Rep., **106**, 121 (1984).

[2] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[3] Karassiov V. P. J. Sov. Laser Research, **12**, 431 (1991).

[4] Карасев В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5 – 6, 24 (1993).

[5] Karassiov V. P. E-print QUANT-PHYS/9503011 (1995).

[6] Борн М., Вольф Е. Основы оптики. М., Наука, 1970.

[7] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Ленинград, Наука, 1975.

[8] Karassiov V. P. J. Phys., **A 26**, 4345 (1993); Phys. Lett., **A 190**, 387 (1994).

[9] Prakash H. and Chandra N. Phys. Rev., **A 4**, 796 (1971). Agarwal G. S. Lett. Nuovo Cimento, **1**, 53 (1971).

[10] L e h n e r J., L e o n h a r d t U., and P a u l H. Phys. Rev., **A 53**, N 4, 2727 (1996).

[11] A g a r w a l G. S., L e h n e r J., and P a u l H. Opt. Commun., **73**, (1996) (in press).

[12] K a r a s s i o v V. P., D e r b o v V. L., and V i n i t s k y S. I. Computer Simulation in Nonlinear Optics (SPIE vol. 2098), p. 164 (1994).

Поступила в редакцию 30 мая 1996 г.