УДК 536.1:519.958

ВОЗБУЖДЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ МОД ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ПЛОТНОГО ГАЗА

С. Л. Попырин

Найдены точные решения нелинейного немарковского кинетического уравнения для неравновесного плотного газа и показано, что его релаксация может сопровождаться возбуждением осцилляционных мод.

Исследования процессов релаксации неравновесных пространственно-однородных сред, актуальные для молекулярной газовой динамики, теплофизики и акустики, продвинуты к настоящему времени во многих направлениях (см. [1 – 3]). Однако нелинейная кинетическая теория релаксации плотных сред не разработана еще в достаточной степени.

Для отыскания зависимости одночастичной функции распределения f молекул плотного газа по скоростям v от времени t используем модельное кинетическое уравнение

$$\partial f/\partial t = (1/\tau)\int\limits_0^\infty g(s/\tau)Q(f(\mathbf{v}, t-s))ds. \tag{1}$$

Здесь Q – нелинейный оператор столкновений Больцмана (см. [2]),

$$Q(f(\mathbf{v},t)) = \int h(\mathbf{v},\mathbf{u},n)[f(\mathbf{V},t)f(\mathbf{U},t) - f(\mathbf{v},t)f(\mathbf{u},t)]d^2\mathbf{n}d^3\mathbf{u},$$

$\mathbf{v},\mathbf{u}$ – скорости до столкновения, $\mathbf{n}$ – вектор единичной длины, $\mathbf{V} = \mathbf{v}-(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{n})\mathbf{n}$, $\mathrm{U} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{n})\mathbf{n}$ – скорости молекул после столкновения; h – ядро интеграла столкновений; $g(t)$ – нормированная на единицу функция, характеризующая плотность вероятности того, что длительность межмолекулярного столкновения равна t; τ – нормировочная константа, имеющая смысл характерной длительности столкновения. Нелокальное по времени (немарковское) кинетическое уравнение (1) естественным образом обобщает обычное уравнение Больцмана (см. [3]) на тот случай, когда необходимо учитывать конечность длительности парных столкновений молекул, но можно пренебречь трехчастичными столкновениями, как, например, в случае плотного газа, молекулы которого могут образовывать между собой водородные связи [4].

Пусть функция распределения f изотропна по скоростям, т.е. $f(\mathbf{v},t) = f(|\mathbf{v}|,t)$. Тогда общее решение уравнения (1) отыскиваем в виде

$$f(v,t) = (2\pi)^{-1,5}\exp(-v^2/2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) L_n^{(1/2)}(v^2/2), \tag{2}$$

где $L_n^{(1/2)}$ – полиномы Лагерра. В случае максвелловских молекул, т.е. при $h(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{n}) = B((\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{n})/|\mathbf{v}-\mathbf{u}|)$ (см. [2]), используя разложение нелинейного оператора столкновений Больцмана Q в ряд по собственным функциям соответствующего ему линеаризованного оператора [5], получаем $c_0(t) \equiv 1$, $c_1(t) \equiv 0$, а при $n \geq 2$ $c_n(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$c_n'(t) + b_n\tau^{-1}\int_0^{\infty} g(s/\tau)c_n(t-s)ds = q_n(t). \tag{3}$$

Здесь b_n – собственные значения линеаризованного оператора столкновений Больцмана, $b_n = 4\pi\int_0^1 B(1-2s)(1-s^n-(1-s)^n)ds$; $q_2(t) = q_3(t) = 0$, а при $n \geq 4$ $q_n(t)$ выражается формулой

$$q_n = (1/\tau)\sum_{k=2}^{n-2} C_n^k H_k^{n-k}\int_0^{\infty} g(s/\tau)c_k(t-s)c_{n-k}(t-s)ds,$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты, $H_k^{n-k} = 4\pi\int_0^1 B(1-2s)(1-s)^n s^k ds$.

Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (3) разрешима рекуррентным образом, при этом ее общее решение имеет вид

$$c_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{jn}\exp(\gamma_{jn}t) + \sum_{i=1}^{\infty} B_{in}\exp(\beta_{in}t).$$

Здесь γ_{jn} – корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3), пронумерованные в порядке убывания вещественных частей: $\mathrm{Re}\gamma_{1n} > \mathrm{Re}\gamma_{2n} > \mathrm{Re}\gamma_{3n} > \ldots$; каждое из β_{in} – сумма конечного числа этих корней, A_{jn} и B_{in} – постоянные коэффициенты.

Таким образом, качественные свойства решения (2) в значительной мере определяются свойствами корней этих характеристических уравнений. В простейшем нетривиальном случае, когда $g(t) = \delta(t-1)$, характеристические уравнения принимают вид $\gamma + b_n \exp(-\gamma\tau) = 0$. Если $\tau < 1/e\Lambda$, где $\Lambda = 4\pi \int\limits_0^1 B(z)dz$, то все γ_{1n} вещественны, т.е. при $t \gg \tau$ $c_n(t) \sim \exp \gamma_{1n} t$, и релаксация всех мод в разложении (2) является монотонной. При $1/e\Lambda < \tau < 1/e\lambda_2$ у некоторых корней $\mathrm{Im}\gamma_{1n} = 0$, поэтому релаксация некоторых мод имеет осцилляционный характер. При $t > 1/e\lambda_2$ у всех корней $\mathrm{Im}\gamma_{1n} = 0$, и релаксация всех мод имеет осцилляционный характер. Таким образом, увеличение τ сопровождается переходом от монотонного режима релаксации к осцилляционному, т.е. возникновением временного ближнего порядка (см. [6]). Эта закономерность имеет место также и в тех случаях, когда ядро нелокальности g имеет более сложный вид, например $g(t) = 1 - \nu + \nu\delta(t-1)$, где ν – положительный постоянный параметр (см. рис. 1).

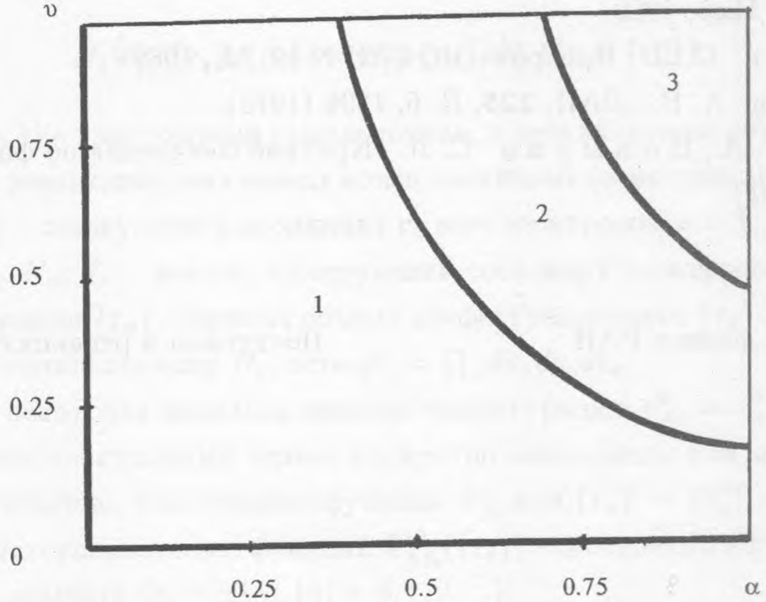

Рис. 1. *Режимы релаксации плотного газа: 1 – монотонный для всех мод, 2 – осцилляционный для некоторых мод, 3 – осцилляционный для всех мод;* $\alpha = \Lambda\tau$.

Используя оценки $\Lambda \sim 1/T$ и $\tau/T \sim d/l$, где T и l – средние время и длина свободного пробега молекул, d – размер молекулы [2], получаем, что осцилляционная релаксация может иметь место при $d/l \gtrsim 1/e$. Для водяного пара это соответствует плотности $\rho \gtrsim 0,1\, г/см^3$.

Таким образом, учитываемый моделью (1) немарковский характер процесса релаксации плотного газа приводит к появлению осцилляционных мод в функции распределения.

Автор благодарит Ф. В. Бункина и Г. А. Ляхова за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 96–02–05796).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Покровский В. Н. УФН, **164**, N 4, 398 (1994).

[2] Эрнст М. Х. В кн.: Неравновесные явления. М., Мир, 1986, с. 60.

[3] Резибуа П., де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М., Мир, 1980.

[4] Попырин С. Л. Препринт ИОФАН N 49, М., 1989.

[5] Бобылев А. В. ДАН, **225**, В. 6, 1296 (1975).

[6] Ляхов Г. А., Попырин С. Л. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11 – 12, 29 (1991).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 25 июня 1996 г.