УДК 530.145+536.75

НЕЛИНЕЙНЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП SU(l, m)

А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин

Рассматриваются нелинейные унитарные представления групп $SU(l,m)$ и их связь с теорией амплитуд вероятности.

В настоящее время линейные представления групп Ли детально изучены и нашли обширное поле приложений в физике. Что касается нелинейных представлений, то, хотя они представляют значительный интерес, в частности, с точки зрения исследования нелинейных уравнений, их систематическая теория отсутствует, и рассмотрены лишь отдельные вопросы.

Здесь мы рассмотрим нелинейные представления некомпактных групп $SU(l,m)$. Будем называть представление, действующее в пространстве N-мерных столбцов с компонентами ψ_i, унитарным, если сохраняется нормировка

$$\sum_{i=0}^{N} |\psi_i|^2 = 1. \tag{1}$$

При этом ψ_i могут преобразовываться как линейно (посредством умножения на унитарную матрицу), так и нелинейно. Как известно, все линейные унитарные неприводимые представления (НП) некомпактных групп бесконечномерны.

Рассмотрим сначала группу $SU(1,1)$. Пусть u_1 и u_2 – элементы фундаментального двумерного НП,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \bar{\beta}\bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \; |u_2|^2 - |u_1|^2 = 1.$$

Образуем величины $\psi_1 = u_1/u_2$ и $\psi_2 = 1/u_2$. Они удовлетворяют соотношению $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$ и преобразуются дробно-линейно:

$$\psi_1' = \frac{\alpha\psi_1 + \beta}{\beta\psi_1 + \alpha}, \; \psi_2' = \frac{\psi_2}{\bar{\beta}}\psi_1 + \bar{\alpha}. \tag{2}$$

Формула (2) задает нелинейное унитарное представление группы $SU(1,1)$.

В пространстве функций $f(\psi_1, \psi_2)$ действие группы задается формулой $T(g)f(\psi_1, \psi_2) = f(\psi_1', \psi_2')$, а генераторы имеют вид

$$J_+ = -\psi_1 \left(\psi_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \psi_2 \frac{\partial}{\partial \psi_2} \right), J_- = \frac{\partial}{\partial \psi_1}, J_0 = \psi_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \frac{1}{2} \psi_2 \frac{\partial}{\partial \psi_2}.$$

Однородные функции ψ_2 степени P являются собственными для оператора Казимира с собственными значениями (1/4) $P(P+2)$.

В случае дискретной серии линейных унитарных НП T_j^+ группы $SU(1,1)$ базис можно записать в форме

$$\Psi_P^n = \left(\frac{\Gamma(-P+n)}{n!\Gamma(-P)} \right)^{1/2} u_1^n u_2^{P-n} = \left(\frac{\Gamma(-P+n)}{n!\Gamma(-P)} \right)^{1/2} \psi_1^n \psi_2^{-P},$$

где $P = 2j < 0$, причем выполняется условие нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_P^n \bar{\Psi}_P^n = 1.$$

Известно, что подобно тому как теория вероятностей непосредственно связана с полугруппами [1], теория амплитуд вероятности – с групповым подходом [2, 3]. (Различные варианты аксиоматики теории амплитуд вероятности рассматриваются в [4, 5].) В нашем случае элементы базиса унитарного представления группы могут быть интерпретированы как амплитудно-вероятностные распределения. Действительно, нетрудно заметить, что Ψ_P^n представляет собой отрицательное биномиальное распределение для амплитуд вероятности ψ_1 и ψ_2 в то время как обычные биномиальные распределения для комплексных амплитуд образуют базис конечномерного НП T_j, $j = P/2$, группы $SU(2)$. Сами же амплитуды вероятности ψ_i для случая компактной группы $SU(2)$ преобразуются по линейному представлению, для некомпактной $SU(1,1)$ – по линейному.

Подход, использованный для группы $SU(1,1)$,может быть распространен на другие группы. Так, он непосредственно обобщается на группы $SU(N-1,1)$. Здесь по фундаментальному представлению преобразуется столбец с элементами $u_1, u_2, ..., u_N$. Из них могут быть построены величины ψ_i,

$$\psi_1 = u_1/u_N, ..., \psi_{N-1} = u_{N-1}/u_N, \psi_N = 1/u_N,$$

удовлетворяющие соотношению нормировки $\sum_{i=1}^{N} |\psi_i|^2 = 1$. Закон преобразования ψ_i задается формулами

$$\psi_i' = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} g_i^k \psi_k + g_i^N}{\sum_{i=1}^{N-1} g_N^k \psi_k + g_N^N},\ i \neq N,\ \psi_N' = \frac{\psi_N}{\sum_{i=1}^{N-1} g_N^k \psi_k + g_N^N},$$

где g_i^k – элементы матрицы фундаментального N-мерного НП. Соотношения определяют нелинейное унитарное представление группы $SU(N-1,1)$. Отрицательные полиномиальные распределения для комплексных амплитуд ψ_i

$$\Psi_P^{n_1 \dots n_{N-1}} = \left(\frac{\Gamma(-P + n_1 + \dots + n_{N-1})}{n_1! \dots n_{N-1}! \Gamma(-P)} \right)^{1/2} \psi_1^{n_1} \dots \psi_{N-1}^{n_{N-1}} \psi_N^{-P}$$

при фиксированном P образуют базис линейного унитарного представления дискретной серии.

В общем случае для групп $SU(l,m)$ $l+m$ компонент u_i базиса фундаментального НП удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{l} |u_i|^2 + \sum_{i=l+1}^{l+m} |u_i|^2 = 1$. Из них могут быть построены нелинейно преобразующиеся величины

$$\psi_i = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{l} |u_i|^2},\ i = 1, \dots, l,\ \psi_i = \frac{u_i}{(\sum_{i=1}^{l} |u_i|^2)^{1/2}},\ i = l+1, \dots, l+m,$$

удовлетворяющие соотношению (1), а следовательно, являющиеся амплитудами вероятности.

Рассмотрим уравнение эволюции, задаваемое конечными преобразованиями группы,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \bar\beta(t) & \bar\alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar u_1 \\ \bar u_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\psi_1 = u_1/u_2$ и $\psi_2 = 1/u_2$, получим: $\partial\psi_1/\partial t = -\alpha\psi_1 - \beta\psi_1^2 + \bar\beta + \alpha\psi_1$, $\partial\psi_2/\partial t = -\alpha\psi_2 - \beta\psi_1\psi_2$. Правая часть первого уравнения системы не зависит от ψ_2, причем уравнения являются нелинейными.

Нелинейные уравнения для величин ψ_i, удовлетворяющих соотношению (1), могут быть построены и для других некомпактных групп. Это, по-видимому, одно из проявлений связи нелинейных уравнений с теорией амплитуд вероятности. Другим примером является известный аналитический метод получения точных решений – метод обратной задачи теории рассеяния [6, 7]. Он исходит из нахождения пары $L - H$, где H – оператор уравнения Шредингера, а условие постоянства оператора L соответствует исходному нелинейному уравнению. Использование амплитуды вероятности, таким образом, необходимо на одной из стадий нахождения точных решений нелинейных уравнений.

С прикладной точки зрения представляет интерес исследование возможностей применения нелинейных представлений групп в оптике в проблеме распространения излучения, где используются дробно-линейные преобразования [8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф е л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., Наука, 1967, т. 2.

[2] С м о р о д и н с к и й Я. А., Ш е л е п и н А. Л., Ш е л е п и н Л. А. УФН, **162**, N 12, 1 (1992).

[3] Ш е л е п и н А. Л., Ш е л е п и н Л. А. Труды ФИАН, **218**, 3 (1994).

[4] Ш е л е п и н А. Л., Ш е л е п и н Л. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7 – 8, 55 (1994).

[5] М а с л о в В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М., Наука, 1976.

[6] К а д о м ц е в Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., Наука, 1976.

[7] У и з е м Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

[8] М е й т л е н д А., Д а н н М. Введение в физику лазеров. М., Наука, 1978.

Поступила в редакцию 11 июля 1996 г.