УДК 539.186.2

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ СТОЛКНОВЕНИЙ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ВОДОРОДОПОДОБНЫМ АТОМОМ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. И. Крылов

Дифференциальные сечения рассеяния быстрых электронов на водородоподобном атоме в однородном электрическом поле вычислены по асимптотикам волновых функций, определяющих ненулевую продольную плотность потока j_z электронов для всего их энергетического спектра (в конечных состояниях). Показано, что найденные сечения могут быть значительно больше сечений аналогичной задачи, но вычисленных по волновым функциям, для которых $j_z = 0$.

В работе [1] в нерелятивистском борновском приближении были получены сечения ионизации водородоподобного атома электронами в однородном, постоянном с напряженностью $\vec{\epsilon}$ электрическом поле, находящемся в полупространстве с границей на расстоянии L (вдоль $\vec{\epsilon}$) от ядра атома, при выполнении условий

$$\epsilon^{2/3} << E_{az} << \epsilon L < E_z, \tag{1}$$

где E_z и E_{az} – продольные энергии в конечном состоянии первичного и вторичного электронов (используем кулоновы единицы).

Существенно, что в отличие от работ [2 – 6], вычисления в [1] проводились по асимптотикам волновых функций, определяющих ненулевую продольную плотность потока электронов для всего их энергетического спектра (подробнее см. [1]).

В настоящем сообщении в рамках приближений и модели, предложенной в [1], получены дифференциальные сечения ионизации электронами водородоподобного атома во внешнем электрическом поле, когда

$$\epsilon^{2/3} << E_{az},\ E_z << \epsilon L \tag{2}$$

и

$$\epsilon^{2/3} << E_z << \epsilon L < E_{az}, \tag{3}$$

а также сечения упругих столкновений при выполнении условий

$$\epsilon^{2/3} << E_z << \epsilon L < E_{oz}. \tag{4}$$

Предварительный анализ полученных выражений показал, что в них проявляется не только анизотропия пространства, но при некоторых условиях полученные сечения могут быть значительно больше сечений, полученных в [4 – 6] и сечений рассеяния электронов на изолированном водородоподобном атоме.

Ось z декартовой системы координат x, y, z выбираем направленной антипараллельно внешнему электрическому полю $\vec{\epsilon} = (0, 0, -\epsilon)$, считаем, так же как в [1], [4 – 6], что оно находится в полупространстве с $z > -L$.

Предполагаем, что на границе этого поля имеется источник моноэнергетического потока электронов, падающих на водородоподобный атом, ядро которого имеет координаты (0, 0, 0). Учитывая большую разницу в средних скоростях электронов и ядра, мы пренебрегаем движением последнего.

Предполагается также, что энергии E и E_a первичного и атомного электронов в конечных состояниях значительно больше энергии ионизации водородоподобного атома и, кроме того, $E >> E_a >> 1$, что позволяет использовать борновское приближение, пренебречь взаимодействием электрона в конечном состоянии с ядром и обменными эффектами.

Тогда начальные состояния первичного электрона и конечные состояния как первичного, так и вторичного электронов (в случае ионизации атома) при $E_z, E_{az} > \epsilon L$, будут описываться волновыми функциями вида

$$\Psi = As^{-1/4}\exp\{i[2\kappa_z s^{3/2}/3|\kappa_z| + \mathbf{k}_\perp \mathbf{r}]\}, \tag{5}$$

а при $E_z << \epsilon L$

$$\Psi = As^{-1/4}\exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}) \begin{cases} \sin[(2/3)s^{3/2} + \alpha_1], & \text{при } z < 0 \\ \exp[i(2s^{3/2}/3 + \alpha_2)], & \text{при } z > 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $s=(2\epsilon)^{1/3}(z+E_z/\epsilon)$; $E_z=\kappa_z^2/2+\epsilon L=k_z^2/2$; волновой вектор $\vec{\kappa}=(\mathbf{k}_\perp,\kappa_z)$ определяет направление плотности потока электронов $\mathbf{j}$ на границе поля, а вектор $\mathbf{k}=(\mathbf{k}_\perp,k_z)$ можно рассматривать как локальный волновой вектор электрона в окрестности плоскости $z=0$. Появление этого вектора связано с возможностью разложить фазы функций (5) и (6) в ряд по степеням z до первого порядка включительно в соответствии с условиями (2) – (4) и быстрым стремлением к нулю волновой функции, описывающей начальное состояние атомного электрона

$$\Psi_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-r_a). \tag{7}$$

Фазы α_1 и α_2 выбираем так же как и в [1] из условия непрерывности (6).

Мы подробно не описываем, вообще говоря, стандартную (см., напр., [7]) процедуру нахождения дифференциальных сечений по функциям (5) – (7), а кратко остановимся только на наиболее существенных элементах расчета, которых нет в работах [1], [4 – 6].

Вследствие того, что функция (6) имеет различный вид при $z<0$ и $z>0$, то для интервалов энергий (2) – (4) матричный элемент кулоновой энергии взаимодействия первичного электрона и атома выражается через интегралы, которые берутся не по всему пространству, а по полупространству, и имеют вид

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\exp(-i\mathbf{cr})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}dxdydz=J, \tag{8}$$

где $\mathbf{c}$ – произвольный вектор.

Воспользовавшись известным соотношением (см., например, [8])

$$r^{-1}=\int\limits_0^\infty e^{-\omega z}J_0(\omega r_\perp)d\omega=\frac{1}{\sqrt{r_\perp^2+z^2}},\ (z>0),$$

интегральным представлением функции Бесселя и вторым экспоненциальным интегралом Вебера [9] (после введения множителя $\exp(-\gamma r_\perp^2)$), нетрудно свести (8) к интегралу, содержащему δ-функцию. В результате интегрирования найдем

$$J=\begin{cases}2\pi\frac{c_\perp-ic_z}{c_\perp c^2}\exp(-i\mathbf{c}_\perp\mathbf{r}_a+c_\perp z_a), & \text{при } z_a<0,\\ \frac{4\pi}{c^2}\exp(-i\mathbf{cr}_a)-2\pi\frac{c_\perp+ic_z}{c_\perp c^2}\exp(-i\mathbf{c}_\perp\mathbf{r}_a-c_\perp z_a), & \text{при } z_a>0.\end{cases} \tag{9}$$

Используя также соотношение

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-i\mathbf{cr}-r}dxdydz=\frac{4\pi}{(1+c^2)^2}\left\{1-\frac{ic_z}{2\sqrt{(1+c_\perp^2)}}\left[3+\frac{c_z^2}{1+c_\perp^2}\right]\right\}, \tag{10}$$

с помощью которого были получены результаты в [1], после довольно громоздких, но элементарных вычислений определим дифференциальные сечения ионизации электронами водородоподобного атома, для которого вектор $\mathbf{k}$, соответствующий конечным состояниям первичного электрона, находится в элементе телесного угла dO, а вектор $\mathbf{k}_a$ атомного электрона определен в элементе $d^3\mathbf{k}_a$.

Для интервала (1):

$$d\sigma_{21} = \frac{2k}{(\pi Z)^2 k_0 q_+^4}\left\{\left[\frac{3}{f_+}+\frac{1}{w_+}\right]^2 + \frac{1}{4g^2}\left[\frac{q_z+k_{az}}{f_+}\left(3+\frac{(q_z+k_{az})^2}{g^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{q_z-k_{az}}{w_+}\left(3+\frac{(q_z-k_{az})^2}{g^2}\right)\right]^2\right\} dO d^3\mathbf{k}_a. \tag{11}$$

Когда выполняются (2) и (3), имеем соответственно:

$$d\sigma_{11} = \frac{2}{(\pi Z)^2}\frac{k}{k_0}|T|^2 dO d^3\mathbf{k}_a, \tag{12}$$

$$d\sigma_{12} = \frac{2}{(\pi Z)^2}\frac{k}{k_0}|Q|^2 dO d^3\mathbf{k}_a, \tag{13}$$

где Z – атомный номер; $\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_{0\perp}, k_{0z})$ – волновой вектор, соответствующий начальному состоянию первичного электрона: $\mathbf{q}_\pm = \mathbf{k}_\pm - \mathbf{k}_0$; $\mathbf{k}_\pm = (\mathbf{k}_\perp, \pm k_z)$; $\mathbf{k} = \mathbf{k}_+$; $g = \sqrt{1+(\mathbf{q}_\perp+\mathbf{k}_{a\perp})^2}$; $\mathbf{k}_{a-} = (\mathbf{k}_{a\perp} - k_z)$; $\mathbf{q}_{+\perp} = \mathbf{q}_{-\perp} = \mathbf{q}_\perp$; $f_\pm = [1+(\mathbf{q}_\pm+\mathbf{k}_a)^2]^2$; $w_\pm = [1+(\mathbf{q}_\pm+\mathbf{k}_{a-})^2]^2$;

$$|T|^2 = \left\{\frac{1}{q_+^2}\left(\frac{5}{f_+}+\frac{1}{W_+}\right)+\frac{1}{q_-^2}\left(\frac{1}{f_-}+\frac{1}{W_-}\right)+2b\frac{B(\alpha^2-\beta^2)-2\alpha\beta A}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right\}^2 +$$

$$+\left\{\frac{q_{+z}-k_{az}}{W_+q_+^2}\left[3+\frac{(q_{+z}-k_{az})^2}{g^2}\right]-3\frac{q_{+z}+k_{az}}{f_+q_+^2}\left[3+\frac{(q_{+z}+k_{az})^2}{g^2}\right]+\right.$$

$$+\frac{q_{-z}+k_{az}}{f_-q_-^2}\left[3+\frac{(q_{-z}+k_{az})^2}{g^2}\right]+\frac{q_{-z}-k_{az}}{W_-q_-^2}\left[3+\frac{(q_{-z}-k_{az})^2}{g^2}\right]+$$

$$\left.+4g\frac{(\alpha^2-\beta^2)(aB+2bA)-2\alpha\beta(aA-2bB)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right\}^2\frac{1}{4g^2};$$

$$A = 1-\frac{q_\perp}{2g}\left(3+\frac{3k_{az}^2-q_\perp^2}{g^2}\right);\ B = \frac{k_{az}}{2g}\left(3+\frac{k_{az}^2-3q_\perp^2}{g^2}\right);$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_+^2}-\frac{1}{q_-^2}\right);\ b = \frac{1}{2q_\perp}\left(\frac{q_{-z}}{q_-^2}-\frac{q_{+z}}{q_+^2}\right);\ \alpha = 1+k_a^2+2\mathbf{q}_\perp\mathbf{k}_{a\perp};$$

$$\beta = 2k_{az}q_{\perp};$$

$$|Q|^2 = \left\{\frac{3}{f_+q_+^2} + \frac{1}{f_-q_-^2}\left[2 + \frac{q_{-z}+k_{az}}{2g}\left(3 + \frac{(q_{-z}+k_{az})^2}{g^2}\right)\right]\right\}^2 +$$

$$+\left\{\frac{1}{f_-q_-^2}\frac{1}{f_+q_+^2}\frac{q_{+z}+k_{az}}{2g}\left[3 + \frac{(q_{+z}+k_{az})^2}{g^2}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{2a}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)B - 2\alpha\beta A\right] + \frac{2b}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)A + 2\alpha\beta B\right]\right\}^2;$$

$dO = \sin\Theta d\Theta d\varphi$; Θ, φ – сферические координаты вектора $\mathbf{k}$; $d^3\mathbf{k}_a = k_a^2 dk_a \sin\Theta_a d\Theta_a d\varphi_a$; если E_z или $E_{az} < \epsilon L$, то $\Theta, \Theta_a \in (0, \pi/2)$.

При $E_z,\ E_{az} > \epsilon L$

$$d\sigma_{22} = \frac{32kd^3\mathbf{k}_a dO}{(\pi Z)^2 k_0 q_+^4 f_+^2}. \tag{14}$$

В формулах (11) – (14) $k_0^2 = k_a^2 + k^2 + 1$.

Для упругих столкновений электронов с водородоподобным атомом дифференциальное сечение, которое соответствует интервалу энергий (4) и нахождению вектора $\mathbf{k}$ в элементе телесного угла dO, определяется выражением

$$d\sigma = \frac{1}{(2Z)^2}\left\{\left[\frac{48}{q_+^2 f_{0+}} + \frac{16}{q_-^2 f_{0-}} - Za_0\right]^2 + \left[\frac{8q_{-z}}{q_-^2 f_{0-} g_0}\left(3 + \frac{q_{-z}^2}{g_0^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{8q_{+z}}{q_+^2 f_{0+} g_0}\left(3 + \frac{q_{+z}^2}{g_0^2}\right) + 2b\left(1 - Z - \frac{q_\perp}{2g_0}\left(3 - \frac{q_\perp^2}{g_0^2}\right)\right)\right]^2\right\} dO, \tag{15}$$

где $f_{0\pm} = (4 + q_\pm^2)^2$; $g_0 = \sqrt{(4 + q_\perp^2)}$; $a_0 = 3/q_+^2 - 1/q_-^2$.

В интервале энергий $E_{oz},\ E_z > \epsilon L$ получим

$$d\sigma = \left(\frac{2}{Zq_+^2}\right)^2 \left|Z - \frac{1}{1 + q_+^2/4}\right|^2 dO,\ k^2 = k_0^2. \tag{16}$$

В формулах (11) – (16) нет множителей вида $|k_z|/|\kappa_z|$, которые входят в аналогичные выражения, найденные в [1], [4 – 6]. Связано это с тем, что в этих работах плотность потока (зависящая от z)

$$j = |A^2|\sqrt{k_\perp^2/s + (2\epsilon)^{2/3}}$$

падающих на атом электронов бралась на границе поля при $z = -L$, в соответствии, по-видимому, с постановкой эксперимента по рассеянию частиц в однородном электрическом поле.

В настоящей работе плотность потока при вычислении сечений определялась в точке $z = 0$, что позволяет использовать их в кинетической теории ионизационного газа, и сечения выражались через $d^3\mathbf{k}$, $d^3\mathbf{k}_a$, а не через $d^3\vec{\kappa}$, $d^3\vec{\kappa}_a$.

Отметим, что при таком выборе j выражения (14) и (16) формально тождественны сечениям рассеяния быстрых электронов на изолированном водородоподобном атоме.

Анализ полученных сечений из-за их громоздкости удобно провести численными методами. Эти результаты будут изложены в другой статье. Здесь же мы отметим появление в некоторых слагаемых выражений (12), (13), (15) множителя $q_\perp^{-1}$, что приводит к существенному увеличению этих сечений по сравнению с найденными в [1], [4 – 6].

Действительно, в сечениях, определяющих ионизацию атомов, величина

$$q_\perp^2 = k^2 \sin^2\Theta - 2kk_0 \sin\Theta \sin\Theta_0 \cos\varphi + k_0^2 \sin^2\Theta_0 \tag{17}$$

(ось x совпадает по направлению с $\mathbf{k}_{0\perp}$) может обращаться в нуль, что приведет к указанному увеличению сечений, если векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ лежат в окрестности поверхности $q_\perp = 0$, и при этом выполняются закон сохранения энергии, одно из неравенств (1) – (3) и условия $k >> k_a >> 1$.

Наиболее простое соотношение между k, k_0, Θ, Θ_0 для такой поверхности получается, когда $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_0$ и $\vec{\epsilon}$ лежат в одной плоскости ($\varphi = 0$). Тогда из (17) следует уравнение $k\sin\Theta - k_0\sin\Theta_0 = 0$.

Так как при $q_\perp \approx 0$ вектор $\mathbf{q}_+$ почти параллелен или антипараллелен оси z, то максимум выражений (12), (13) соответствует векторам $\mathbf{k}_a$, направленным вдоль оси z и антипараллельно $\vec{\epsilon}$.

При ионизации изолированного атома максимум сечений никак не связан с $q_\perp$ и соответствует $\mathbf{k}_a$, направленным приблизительно антипараллельно $\mathbf{q}_+$ и, следовательно, произвольно относительно z.

При упругих столкновениях множитель $q_\perp^{-1}$ появляется в (15) только при $Z > 1$. Следовательно, заметное увеличение сечений во внешнем электрическом поле можно ожидать при рассеянии электронов на ионах.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты могут быть использованы для описания элементарных процессов в ионизованном газе, если для достаточно больших значений энергий E_z расстояние E_z/ϵ от ядра атома до точки поворота электрона (вдоль $\vec{\epsilon}$) меньше среднего расстояния между атомами, и характерное время задачи τ значительно больше времени, которое электрон проводит между точкой поворота и ядром атома, порядка $E_z^{1/2}/\epsilon$ (в единицах $\hbar^3/(Ze^2)^2 m_e$). Так, при $\epsilon = 0,01$ и $E_z \sim 1$ концентрация атомов может достигать значений порядка 10^{15} $см^{-3}$, а $\tau >> 10^{-15}$ c.

Автор признателен А. А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7-8, 90 (1995).
[2] Кондратович В. Д., Островский В. Н. ЖЭТФ, **79**, 395 (1980).
[3] Фабрикант И. И. ЖЭТФ, **83**, 1675 (1982).
[4] Крылов В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1-2, 37 (1991).
[5] Крылов В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11-12, 61 (1991).
[6] Крылов В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 3-4, 39 (1992).
[7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Наука, 1974.
[8] Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, часть вторая, М., Наука, 1974.
[9] Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы, М., Атомиздат, 1968.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 2 сентября 1996 г.