УДК 530.145

О ГРУППЕ, СВЯЗАННОЙ С ТЕОРИЕЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ–ПЕРО

А. В. Виноградов

Предложено обобщение теории интерферометра Фабри–Перо. Дана групповая трактовка процессов отражения и прохождения излучения.

1. *Общие соотношения.* Пусть R и T – коэффициенты отражения и пропускания плоской электромагнитной волны, падающей нормально на интерферометр Фабри–Перо, образованный двумя плоскопараллельными зеркалами, имеющими коэффициенты отражения и пропускания R_1, T_1 и R_2, T_2. Для того, чтобы найти коэффициенты отражения и пропускания для каждого из зеркал и интерферометра, необходимо решить волновые уравнения с соответствующими граничными условиями. Для зеркал они имеют вид

$$E'' + k^2\epsilon_j(x)E = 0,\ j = 1,2$$
$$E(x) \sim \begin{cases} e^{ikx} + R_j e^{-ikx}, & x \to -\infty \\ T_j e^{ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

а для интерферометра:

$$E'' + k^2[\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)]E = 0$$
$$E(x) \sim \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x \to -\infty \\ Te^{ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

где $\epsilon_j(x)$ – распределение диэлектрической проницаемости в j-ом зеркале.

При весьма общих предположениях о виде функций $\epsilon_1(x)$ и $\epsilon_2(x)$ можно показать, что отражение R и пропускание T интерферометра могут быть выражены через аналогичные величины составляющих зеркал:

$$R = \frac{R_1 + R_2 T_1/T_1^*}{1 + R_1^* R_2 T_1/T_1^*}$$

$$T = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1^* R_2 T_1/T_1^*}. \tag{3}$$

Формулы (3) справедливы в предположении: (а) отсутствие поглощения ($\epsilon_1(x)$ и $\epsilon_2(x)$ – вещественны), (б) $[\epsilon_1(x) - 1]$ и $[\epsilon_2(x) - 1]$ – финитны и не перекрываются в пространстве. Никаких других ограничений на функции $\epsilon_1(x)$ и $\epsilon_2(x)$ не накладывается. Для доказательства (3) нужно построить решение уравнения (2) для интерферометра путем последовательной спивки решений в областях III, II и I (см. рис. 1) с учетом граничных условий в (1) и (2) (см. ниже).

Если сместить одно из зеркал (например, 2) на расстояние L, то формулы (3) останутся справедливыми, если заменить R_2 на $R_2 e^{-2ikL}$. При этом выражения (3) переходят в известные формулы для интерферометра Фабри–Перо, которые обычно выводятся путем суммирования амплитуд многократно отраженных лучей, образующих геометрическую прогрессию [1, 2].

2. *Унитарность.* В отсутствие поглощения стандартное рассмотрение сохранения потока для каждого из трех уравнений (1) – (2) дает

$$|R_j|^2 + |T_j|^2 = 1, \; j = 1, 2 \tag{4}$$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \tag{5}$$

Прямая подстановка R и T из (3) в (5) подтверждает, что соотношение (5) выполняется для любых двух пар комплексных чисел $\{R_1, T_1\}$ и $\{R_2, T_2\}$, удовлетворяющих условию (4)

3. *Группа.* Приведенное выше рассмотрение показывает, что пары комплексных чисел $\{R_j, T_j\}$, удовлетворяющих условию $|R_j|^2 + |T_j|^2 = 1$, образуют группу, закон композиции которой задан соотношениями (3). Группу $\{R_j, T_j\}$ естественно назвать группой рассеяния.

Имеется взаимно однозначное соответствие между этой группой и группой унитарных унимодулярных матриц второго порядка (SU_2):

$$\{R_j, T_j\} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} T_j, R_j \\ -R_j^*, T_j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Подчеркнем, однако, различие законов композиции группы рассеяния (см. (3)) и группы (SU_2), который соответствует произведению матриц:

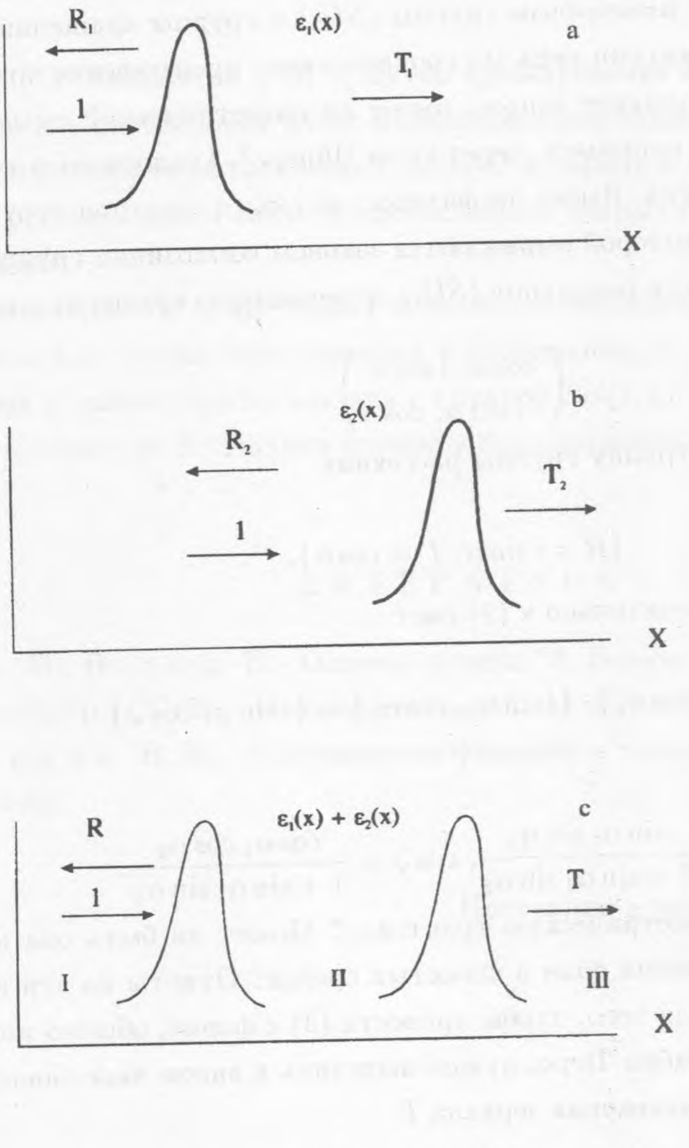

Рис. 1. *Отражение волны от одного (a), (b) и двух (c) потенциальных барьеров.*

$$R = T_1 R_2 + R_1 T_2^*, \; T = T_1 T_2 - R_1^* R_2^*. \tag{7}$$

4. *Обсуждение.* (a) Таким образом, формулы (3), полученные из рассмотрения интерферометра Фабри–Перо, определяют закон композиции в группе, элементами которой являются пары чисел $\{R_j, T_j\}$, такие, что $|R_j|^2 + |T_j|^2 = 1$. Эта группа связана взаимно однозначным соответствием с группой (SU_2), но имеет другой закон композиции.

В связи с этим возникают следующие вопросы. Группа (SU_2) параметризуется углами Эйлера, что выражает изоморфизм группы (SU_2) и группы вращений (SO_3) [3]. В частности, произведению матриц вида (6) соответствует произведение вращений трехмерного пространства. Возникает вопрос, имеет ли геометрический смысл закон композиции (4), выраженный, например, через углы Эйлера? Аналогичный вопрос можно отнести и к группе рассеяния. Имеет ли физический смысл слоистая структура, отражение R и пропускание T которой выражаются законом композиции группы (SU_2) (см. (7))? Рассмотрим в частности подгруппу (SU_2), отвечающую вращениям на плоскости:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha, \; i\sin\alpha \\ -i\sin\alpha, \; \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{8}$$

и соответствующую ей подгруппу группы рассеяния

$$\{R = i\sin\alpha, \; T = \cos\alpha\}. \tag{9}$$

Закон композиции (3) применительно к (9) дает

$$\{i\sin\alpha_1, \; \cos\alpha_1\} \cdot \{i\sin\alpha_2, \; \cos\alpha_2\} = \{i\sin\varphi, \; \cos\varphi\}, \tag{10}$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{1 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}, \; \cos\varphi = \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{1 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}. \tag{11}$$

Имеет ли угол φ в (10) геометрическую трактовку? Может ли быть она полезна для изучения задач распространения волн в слоистых средах? Ответы на эти вопросы автору пока неизвестны. (б) Для того, чтобы привести (3) к форме, обычно используемой в теории интерферометра Фабри–Перо, нужно выделить в явном виде зависимость отражения и пропускания от положения зеркала L:

$$R_j(L) = \rho_j e^{-2ikL}, \; T_j(L) = \tau_j. \tag{12}$$

Тогда формулы (3) принимают более привычный вид:

$$R = \rho_1 + \frac{\rho_2 \tau_1^2 e^{-2ikL}}{1 - \rho_1' \rho_2 e^{-2ikL}}, T = \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - \rho_1' \rho_2 e^{-2ikL}}. \tag{13}$$

Здесь величины ρ_1 и ρ_2 описывают отражение изолированных зеркал, причем условно (поскольку $\epsilon_1(x)$ и $\epsilon_2(x)$ – распределенные, хотя и неперекрывающиеся, функции), первое зеркало находится в начале координат, а второе – на расстоянии L от него. Через $\rho_1' =$

$-\rho_1^* \tau_1 / \tau_1^*$ обозначен коэффициент отражения первого зеркала при падении волны на него справа.

Формулы (13) выводятся в [1, 2] путем суммирования амплитуд бесконечного числа прошедших и отраженных волн. Использованный нами вывод на основе волновых уравнений представляет методический интерес и наряду с формулами (3) может быть полезен при решении задач синтеза многослойных покрытий оптического и рентгеновского диапазонов.

Автор благодарит Л. А. Щелепина за полезное обсуждение.

После того, как статья была принята к публикации, И. В. Тютин показал автору, что найденная в работе группа связана с группой $SU(1,1)$. Доказательство будет опубликовано отдельно. И. В. Тютину приношу благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борн М., Вольф Е. Основы оптики, М. Наука, 1973.

[2] Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, М. Физматгиз, 1958.

[3] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М. Наука, 1991.

Поступила в редакцию 20 сентября 1996 г.