УДК 533.951

ЭНТРОПИЯ И МОДУЛЯЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

С. И. Попель[1]

Показана справедливость H-теоремы для модуляционных процессов. Продемонстрировано, что переход от состояния слабой в состояние сильной плазменной турбулентности может трактоваться как неравновесный фазовый переход, в результате которого система переходит в более упорядоченное состояние.

Модуляционное взаимодействие является ключевым при переходе плазмы из состояния слабой в состояние сильной турбулентности [1]. В состоянии слабой турбулентности фазы волн могут рассматриваться как случайные, произвольное волновое движение может быть представлено в виде линейной суперпозиции мод колебаний, а амплитуды волн медленно изменяются со временем из-за взаимодействия волн между собой и с частицами плазмы. Состояние сильной турбулентности характеризуется возрастанием роли регулярных полей в плазме, что приводит к появлению когерентных структур, которые хаотически взаимодействуют друг с другом. Переход из состояния слабой в состояние сильной плазменной турбулентности часто рассматривается как процесс самоорганизации (см., например, [2, 3]). Интуитивно кажется ясным, что плазменная система более упорядочена в состоянии сильной турбулентности. Тем не менее, вопрос о степени упорядоченности такой системы не рассматривался, как это обычно делается [4], на языке энтропии (S-теорема). Понятие энтропии существенно при определении критериев самоорганизации, среди которых выделим принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации [4]. Для частного случая распада системы на солитон и свободные волны процесс перехода из состояния слабой в состояние сильной турбулентности трактовался как фазовый переход (см. [5, 6]). При этом предполагалось, что турбулентный спектр находится в состоянии термодинамического равновесия. Тем не

[1]Институт динамики геосфер РАН, работа выполнена в Институте общей физики РАН.

менее, обычно последнее предположение не выполняется в плазменных системах. Как слаботурбулентное, так и сильнотурбулентное плазменные состояния представляют собой неравновесные состояния в открытой системе. Целью настоящей работы является исследование эволюции энтропии при развитии модуляционных процессов. Мы получим соотношение, которое может рассматриваться как H-теорема, а также рассмотрим вопрос о степени упорядоченности системы и продемонстрируем справедливость принципа минимума производства энтропии при переходе из состояния слабой в состояние сильной плазменной турбулентности.

Согласно H-теореме система эволюционирует так, что функция $H = -S$, где S – энтропия системы, не возрастает. Получим аналогичное соотношение для системы, для которой характерно развитие модуляционных процессов. Энтропия газа, описываемого функцией распределения $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$, определяется следующим образом (см., например, [4]):

$$S = -\int f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \ln f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{1}$$

где функция распределения нормирована следующим условием:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \tag{2}$$

а $n(\mathbf{r}, t)$ – плотность распределения частиц в пространстве. Рассмотрим случай бесстолкновительной плазмы в отсутствие внешних полей. Тогда основным взаимодействием, определяющим эволюцию распределения частиц плазмы, является резонансное взаимодействие частиц с волнами. Приведем здесь все соотношения для какого-то одного сорта частиц плазмы (например, электронов). Будем считать, что функция распределения $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ характеризует именно этот сорт частиц. Обобщение на случай нескольких сортов частиц очевидно.

Модуляционное взаимодействие приводит к генерации регулярных полей в плазме, содержащей также волновые поля, которые могут рассматриваться как случайные [1]. Таким образом, необходимо учесть взаимодействие частиц как со случайными волновыми полями, так и с регулярными. Уравнение, описывающее эволюцию функции распределения частиц, имеет вид:

$$df_{\mathbf{p}}/dt = \hat{I}^{\mathrm{nr}} + \hat{I}^{\mathrm{r}}, \tag{3}$$

где

$$\hat{I}^{\mathrm{nr}} = \pi e^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int \frac{k_i k_j}{k^2} |E|^2_{\mathbf{k},\omega} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial p_j} d\mathbf{k} d\omega \cdot \tag{4}$$

представляет собой обычный квазилинейный интеграл (см., например, [2]), соответствующий взаимодействию между частицами и случайными полями, а

$$\hat{I}^{\mathrm{r}} = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial p_i}\int \mathrm{Re}\left\{\int \frac{\exp\left(i(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{r}-\mathbf{r}'])\right)}{i(\omega-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})+i0)}\mathcal{E}_i^*(\mathbf{r},t)\mathcal{E}_j(\mathbf{r}',t)d\mathbf{k}\right\}\frac{\partial f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}',t)}{\partial p_j}d\mathbf{r}' \tag{5}$$

определяет вклад от взаимодействия частиц и регулярных полей [2]. Здесь ω, $\mathbf{k}$ – соответственно частота и волновой вектор, $|E|^2_{\mathbf{k},\omega}$ – корреляционная функция случайных полей (см., например, [2], с. 60), $-e$ – заряд электрона, $\mathcal{E}(\mathbf{r},t)$ – амплитуда огибающей регулярного поля, $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Эволюция энтропии удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{dt} = -\int(\hat{I}^{\mathrm{nr}}+\hat{I}^{\mathrm{r}})\ln f\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - \int(\hat{I}^{\mathrm{nr}}+\hat{I}^{\mathrm{r}})\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = -\int\hat{I}^{\mathrm{nr}}\ln f\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - \int\hat{I}^{\mathrm{r}}\ln f\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{6}$$

Хорошо известно (см., например, [7]), что первое слагаемое в правой части уравнения (6), определяющее вклад в эволюцию энтропии от квазилинейного взаимодействия случайных полей и частиц, – неотрицательно. Второе слагаемое также неотрицательно. Действительно, оно может быть представлено в виде:

$$-\int\hat{I}^{\mathrm{r}}\ln f\frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = e^2\int\frac{d\mathbf{p}d\mathbf{r}d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3|\mathbf{v}|}\delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)\left[\frac{\theta(r'_\parallel-r_\parallel)}{f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}',t)}+\frac{\theta(r_\parallel-r'_\parallel)}{f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)}\right]\times$$
$$\times\mathrm{Re}\left\{\left(\exp(-i\omega r'_\parallel/v)\mathcal{E}_i(\mathbf{r}',t)\frac{\partial f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}',t)}{\partial p_i}\right)\left(\exp(-i\omega r_\parallel/v)\mathcal{E}_j(\mathbf{r},t)\frac{\partial f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)}{\partial p_j}\right)^*\right\}, \tag{7}$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x>0,\\ 1/2, & \text{если} \quad x=0,\\ 0, & \text{если} \quad x<0,\end{cases}$$

а $\parallel$ ($\perp$) обозначает компоненту вектора, параллельную (перпендикулярную) направлению вектора скорости $\mathbf{v}$. Правая часть уравнения (7) может быть представлена в виде суммы двух слагаемых типа $\int d\mathbf{p}d\mathbf{r}d\mathbf{r}'G(\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{r}',t)A(\mathbf{p},\mathbf{r},t)A(\mathbf{p},\mathbf{r}',t)$, где $G(\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ и $A(\mathbf{p},\mathbf{r},t)$ – действительные функции, причем $G(\mathbf{p},\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = G(\mathbf{p},\mathbf{r}',\mathbf{r},t) \geq 0$. Эти слагаемые неотрицательны.

Таким образом, оба слагаемых в правой части уравнения (6) неотрицательны. Более того, как правило, функция распределения частиц резонансных с волнами при модуляционном взаимодействии не удовлетворяет уравнению $df_{\mathbf{p}}/dt = 0$. Это дает возможность сделать вывод о том, что энтропия при развитии модуляционных процессов возрастает. Итак, в рассматриваемой ситуации имеет место H–теорема.

Следует отметить, что обычно H–теорема формулируется для ситуаций, когда основное влияние на эволюцию функции распределения оказывают столкновения частиц (см., например, [8]). Вместе с тем, в физике плазмы интеграл столкновений Ландау–Балеску выводится из обычного бесстолкновительного кинетического уравнения для точной функции распределения [2]. При этом важной является процедура усреднения функции распределения по статистическому ансамблю и учет флуктуаций функции распределения. В определении энтропии (1) представлена именно усредненная функция распределения. Уравнение (3) также выписано для усредненной функции распределения в ситуации, когда столкновениями между частицами плазмы можно пренебречь, а его правая часть может трактоваться как интеграл столкновений, вызванный флуктуациями, обязанными взаимодействию между полями (как случайными, так и регулярными) и частицами. Таким образом, уравнение (6) в действительности определяет эволюцию энтропии системы в рассматриваемой ситуации. Отметим также, что генерация регулярных полей при развитии модуляционных процессов приводит к увеличению энтропии (второе слагаемое в правой части (6) по меньшей мере неотрицательно).

Применим понятие энтропии для определения относительной степени упорядоченности состояний системы при переходе из состояния слабой в состояние сильной ленгмюровской турбулентности, а также проверим принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации (см. [4], с. 99) для случая этого перехода. Введем понятие "старого" состояния, которое соответствует слабой турбулентности, характеризуемой спектром случайных ленгмюровских волн $W^l_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)$ таким, что их плотность энергии имеет вид:

$$W^l(\mathbf{r},t) = \int W^l_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)d\mathbf{k}. \tag{8}$$

В результате накачки плотность энергии случайных волн увеличивается. Известно [1, 9], что после того, как она достигает некоторого порогового значения, которому, как будем считать, соответствует спектр $W^{(0)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)$, происходит генерация регулярных полей в результате развития модуляционных процессов. Осуществляется переход системы в "новое" сильнотурбулентное состояние, характеризующееся наличием в плазме наряду со случайными полями регулярных полей, описываемых амплитудой огибающей $\mathcal{E}(\mathbf{r},t)$. Введем также понятие продолженного "старого" состояния, что означает гипотетическую ситуацию, когда плазма находится в состоянии слабой турбулентности (регулярные поля отсутствуют), но плотность энергии случайных волн превосходит пороговое значение.

Для проверки относительной степени упорядоченности необходимо выбрать управляющий параметр, характеризующий переход системы из "старого" в "новое" состояние, и найти разность энтропий системы в продолженном "старом" и "новом" состояниях при одинаковых значениях управляющего параметра в предположении равенства средней эффективной энергии системы в обоих состояниях. "Новое" состояние более упорядочено, если разность энтропий положительна. Данное утверждение представляет собой аналог S–теоремы (см. [4], с. 76) для рассматриваемой ситуации, где система характеризуется функцией распределения частиц, а также спектрами случайных и регулярных полей. Проверка принципа минимума производства энтропии в процессах самоорганизации подразумевает сравнение выражений для производства энтропии $\sigma = dS/dt \geq 0$ в продолженном "старом" и в "новом" состояниях в указанных выше предположениях, касающихся управляющего параметра и средней эффективной энергии системы. Согласно этому принципу процесс самоорганизации рассматривается как результат неравновесного фазового перехода (а возможно, и последовательности фазовых переходов). Производство энтропии в новом состоянии, возникшем после неравновесного фазового перехода, оказывается меньше производства энтропии старого, но продолженного в неустойчивую область состояния системы.

В качестве управляющего параметра естественно выбрать функцию, определяющую порог модуляционного взаимодействия. Для различного вида спектров случайных волн порог различен [9], но приближенно пороговое условие может быть записано в виде:

$$\frac{W^l}{n_0(T_e + T_i)} > 12\Lambda k_{\text{ch}}^2 r_{De}^2, \tag{9}$$

где n_0 – невозмущенная плотность электронов, $T_{e(i)}$ – эффективная температура электронов (ионов), $\Lambda \sim 1$ – некоторая постоянная, зависящая от вида спектра, k_{ch} – характерная длина волнового вектора в спектре, r_{De} – дебаевский радиус электронов. Таким образом, в качестве управляющего параметра выбираем $W^l/\Lambda k_{\text{ch}}^2 T_e(T_e + T_i)$.

Предположим, что распределение частиц по импульсам может быть аппроксимировано максвелловским с эффективной температурой $T_e(t)$: $f_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)(2\pi/mT_e)^{3/2} \times \exp(-p^2/2m^2 v_{Te}^2)$, где m – масса электрона, а v_{Te} – тепловая скорость электронов. Тогда выражение для энтропии имеет вид

$$S = \frac{3}{2}N - \int n \ln\left[\frac{(2\pi)^{3/2} n}{(mT_e)^{3/2}}\right] d\mathbf{r}, \tag{10}$$

где N – полное число электронов в плазме, являющееся сохраняющейся величиной.

Предположим также, что ионы не участвуют в резонансном взаимодействии. Тогда полная энергия электронов и волн сохраняется (см., например, [2] с. 67, 257), т.е.

$$\int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{2m}f_{\mathbf{p}} + W^{\mathrm{reg}} + \int d\mathbf{r}d\mathbf{k}W^l_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = C_0, \tag{11}$$

где C_0 – некоторая константа, характеризующая среднюю эффективную энергию системы, а $W^{\mathrm{reg}} \equiv \int d\mathbf{r}|\mathcal{E}(\mathbf{r},t)|^2/2\pi$ – энергия регулярных полей. В рассматриваемых предположениях значения C_0 должны совпадать как в продолженном "старом", так и в "новом" состояниях, т.е.

$$\frac{3}{2}NT_e^{\mathrm{new}} + W^{\mathrm{reg}} + \int d\mathbf{r}W^{l(\mathrm{new})}(\mathbf{r},t) = \frac{3}{2}NT_e^{\mathrm{old}} + \int d\mathbf{r}W^{l(\mathrm{old})}(\mathbf{r},t). \tag{12}$$

Здесь индексы "new" и "old" относятся соответственно к "новому" и продолженному "старому" состояниям. В уравнении (12) учтено, что функция распределения электронов аппроксимируется максвелловской, а также, что в продолженном "старом" состоянии регулярные поля отсутствуют. Температура $T_e^{\mathrm{new(old)}}$ предполагается не зависящей от $\mathbf{r}$.

Рассматривая только околопороговую ситуацию, когда плотность энергии случайных волн превосходит пороговое значение на величину существенно меньшую порогового значения, получим выражение для $S_{\mathrm{old}} - S_{\mathrm{new}}$ – разности энтропий системы в продолженном "старом" и "новом" состояниях при одинаковых значениях управляющего параметра и при выполнении условия (12). В околопороговой области имеем для $\delta T_e = T_e^{\mathrm{new}} - T_e^{\mathrm{old}}$: $|\delta T_e| \ll T_e^{\mathrm{new}}$. Модуляционное взаимодействие приводит к возмущению электронной концентрации: $n = n_0 + \delta n$ ($\int \delta n d\mathbf{r} = 0$). Учитывая только слагаемые, содержащие первую степень δT_e и δn, в разложении выражения (10), а также предполагая, что спектры случайных волн в "новом" и продолженном "старом" состояниях отличаются множителем α ($W_{\mathbf{k}}^{l(\mathrm{new})} = \alpha W_{\mathbf{k}}^{l(\mathrm{old})}$), что позволяет считать равными значения Λ и k_{ch} в выражениях для управляющего параметра в этих состояниях, находим

$$S_{\mathrm{old}} - S_{\mathrm{new}} \approx -\frac{3}{2}N\frac{\delta T_e}{T_e} \approx \frac{W^{\mathrm{reg}}}{T_e}. \tag{13}$$

Здесь мы опустили индекс "new", характеризующий T_e. Соотношение между δT_e и W^{reg}, использованное в (13), подразумевает, что $\int d\mathbf{r}W^{l(\mathrm{old})} \ll NT_e$.

Выразим правую часть (13) через величину $\delta W^l > 0$, на которую энергия случайных волн в сильнотурбулентном состоянии превосходит энергию, соответствующую порогу. Для этого используем уравнения, связывающие спектр случайных волн и амплитуду огибающей регулярного поля. Для случая, когда характерный пространственный масштаб случайных полей много меньше, чем регулярных, эти уравнения имеют вид [2]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{v}_{\rm gr}(\mathbf{k}_1)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\right]\delta W^l_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r},t)=\frac{\omega_{pe}}{2n_0}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}_1}W^l_{\mathbf{k}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta n^{\rm reg}(\mathbf{r},t)\right), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\delta n^{\rm reg}}{\partial t^2}-v_s\nabla^2\delta n^{\rm reg}=\frac{1}{4\pi m_i}\nabla^2|\mathcal{E}(\mathbf{r},t)|^2, \tag{15}$$

где $\int d\mathbf{r}d\mathbf{k}\delta W^l_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t)=\delta W^l$, ω_{pe} – электронная плазменная частота, $\mathbf{v}_{\rm gr}(\mathbf{k})$ – зависимость групповой скорости ленгмюровских волн от волнового вектора, $v_s=(T_e/m_i)^{1/2}$ – скорость звука, m_i – масса иона, $\delta n^{\rm reg}$ – возмущение электронной концентрации, связанное с наличием регулярных полей. Выражая $\delta W^l_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r},t)$ через $\mathcal{E}(\mathbf{r},t)$ с помощью (14) и (15) и используя преобразование Фурье, находим выражение для δW^l:

$$\delta W^l=\int d\mathbf{r}d\mathbf{k}d\omega\frac{[|\mathcal{E}|^2]_{\omega,\mathbf{k}}}{2\pi}\exp\left(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{k^2v_s^2}{k^2v_s^2-\omega^2}\int d\mathbf{k}_1\frac{\omega_{pe}}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{\rm gr}(\mathbf{k}_1)}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}_1}\right)\frac{W^{(0)}_{\mathbf{k}_1}}{4n_0T_e}\right], \tag{16}$$

где $[|\mathcal{E}|^2]_{\omega,\mathbf{k}}$ обозначает Фурье–компоненту функции $|\mathcal{E}|^2$. Отметим, что в случае $k\ll k_1$ (который соответствует данному рассмотрению) дисперсионное соотношение для модуляционной неустойчивости ($\mathbf{k}$ и ω соответствуют модуляционным возмущениям) имеет вид [10]:

$$1=\frac{k^2v_s^2}{k^2v_s^2-\omega^2}\int d\mathbf{k}_1\frac{\omega_{pe}}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{\rm gr}(\mathbf{k}_1)}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}_1}\right)\frac{W^l_{\mathbf{k}_1}}{4n_0T_e}. \tag{17}$$

Именно из уравнения (17) следует вывод о наличии порога неустойчивости. Таким образом, находим, что $W^{\rm reg}=\delta W^l>0$, а

$$S_{\rm old}-S_{\rm new}\approx\frac{\delta W^l}{T_e}>0. \tag{18}$$

Таким образом, "новое" (сильнотурбулентное) состояние является более упорядоченным, чем состояние слабой турбулентности.

Дифференцирование выражения (13) по времени дает

$$\sigma_{\rm old}-\sigma_{\rm new}\approx\frac{1}{T_e}\frac{dW^{\rm reg}}{dt}, \tag{19}$$

где $\sigma_{\rm new(old)}$ – производство энтропии в "новом" (продолженном "старом") состоянии. В условиях модуляционной неустойчивости $dW^{\rm reg}/dt=2\Gamma W^{\rm reg}>0$, где Γ – характерное значение инкремента модуляционной неустойчивости. Таким образом,

$$\sigma_{\text{new}} \approx \sigma_{\text{old}} - \frac{2\Gamma W^{\text{reg}}}{T_e} < \sigma_{\text{old}}. \tag{20}$$

Выполнение неравенства (20) указывает на справедливость принципа минимума производства энтропии в процессах самоорганизации в случае перехода плазменной системы от состояния слабой в состояние сильной турбулентности и дает возможность трактовки этого процесса как неравновесного фазового перехода, в результате которого система переходит в более упорядоченное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Vladimirov S. V., Tsytovich V. N., Popel S. I., and Khakimov F. Kh. Modulational Interactions in Plasmas. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[2] Tsytovich V. N. Lectures on Non–Linear Plasma Kinetics. Berlin, Springer, 1995.

[3] Popel S. I. Plasma Stochasticity and Modulational Interactions of Waves Associated with Lower–Hybrid Resonance. J. Plasma Phys. (1996), в печати.

[4] Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.

[5] Петвиашвили В. И., Яньков В. В. В книге: Вопросы теории плазмы. Вып. 14. М., Энергоатомиздат, 1985.

[6] Крылов С. Ф., Яньков В. В. ЖЭТФ, **79**, 82 (1980).

[7] Nishikawa K. and Wakatani M. Plasma Physics. Basic Theory with Fusion Applications. Berlin, Springer, 1994.

[8] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., Наука, 1979.

[9] Vladimirov S. V. and Popel S. I., Phys. Rev. E, **51**, 2390 (1995).

[10] Веденов А. А., Рудаков Л. И. ДАН, **159**, 767 (1964).

Поступила в редакцию 5 ноября 1996 г.