

УДК 530.145

## ПОЛИХРОМАТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ ТУННЕЛИРОВАНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ ДВУХЪЯМНОЙ СИСТЕМЕ

А. Н. Георгобиани, Б. П. Кирсанов, М. В. Кронгауз

*Рассмотрены явления локализации электрона в двухъямном потенциале в двухуровневом приближении под воздействием нескольких внешних электромагнитных полей. На основе метода усреднения Боголюбова и использования диаграмм Фейнмана разработаны методы расчета вероятности локализации и генерации гармоник электромагнитного поля в этих условиях. Рассчитано несколько конкретных ситуаций с полями соизмеримых и несоизмеримых частот при различных начальных условиях.*

Скорость туннелирования электрона в двухъямном потенциале существенно зависит от частоты и интенсивности приложенного внешнего электромагнитного поля [1 – 6]. При расчетах на ЭВМ неожиданно было обнаружено, что при определенных условиях возможно не только увеличение скорости туннелирования [2b], но и подавление туннелирования [1 – 6]. При этом возникает локализация электрона в одной из ям. Несмотря на то, что система обладает центром инверсии, подобная локализация может сопровождаться генерацией четных гармоник внешнего поля, а также возникновением постоянного диполя [4]. Подобные эффекты, обнаруживаемые при численном решении, находят теоретическое объяснение [2 – 4, 6] на языке квазиэнергий [7] и теории Флюкк [8]. Полученные аналитические выражения [3, 4], применимые при определенных ограничениях [3], показывают, что частота туннелирования пропорциональна разности квазиэнергий:

$$\hbar\omega'_{21} = \hbar\omega_{21} J_0 \left( \frac{2|V_{21}|}{\hbar\omega} \right), \quad (1)$$

где

$$V_{21} = -d_{21}E, \quad (2)$$

здесь  $\omega_{21}$  – частота перехода в двухуровневой модели без внешнего поля,  $d_{21}$  – дипольный момент перехода,  $E$  – амплитуда внешнего переменного поля  $E \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка 1-го рода. Таким образом при совпадении  $\frac{2|V_{21}|}{\hbar\omega}$  с одним из корней  $J_0(x)$  (квазиуровни пересекаются) туннелирование исчезает.

Цель нашей работы – исследовать явление локализации туннелирования и связанные с ним процессы генерации в присутствии нескольких внешних монохроматических полей

$$\mathcal{E}(t) = \sum_j E(\omega_j) \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (3)$$

где  $E(\omega_j) \geq 0$ , а поляризация всех полей направлена вдоль оси  $x$ .

Наше рассмотрение основано на процедуре "усреднения" [9], аналогичной методу Боголюбова [10].

Использование диаграмм Фейнмана, аналогичное тому как мы это делали в пространственной задаче [11] для дифракции на структуре с периодическими неоднородностями, делает вычисления наглядными и позволяет просто оценивать вклады от различных сложных процессов в любых порядках при наличии нескольких взаимодействующих полей.

Рассмотрим одномерную квантовую систему с двухъямным потенциалом  $V_0(x)$  (см. рис. 1) и будем учитывать только уровни 1 и 2. Энергия взаимодействия нашей системы с внешним классическим полем (3) в дипольном приближении будет иметь вид

$$V(t) = -d\mathcal{E}(t), \quad (4)$$

где  $d$  – дипольный момент перехода между уровнями 1 и 2. Удобно перейти к состояниям, локализованным в правой ( $r$ ) и левой ( $l$ ) ямах [3]:

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \\ |l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle). \end{aligned} \quad (5)$$

В этом двухуровневом представлении гамильтониан системы примет вид [3]

$$\hat{H} = V(t)\sigma_z + \frac{\hbar\omega_{21}}{2}\sigma_x, \quad (6)$$

где  $\sigma_z, \sigma_x$  – матрицы Паули.

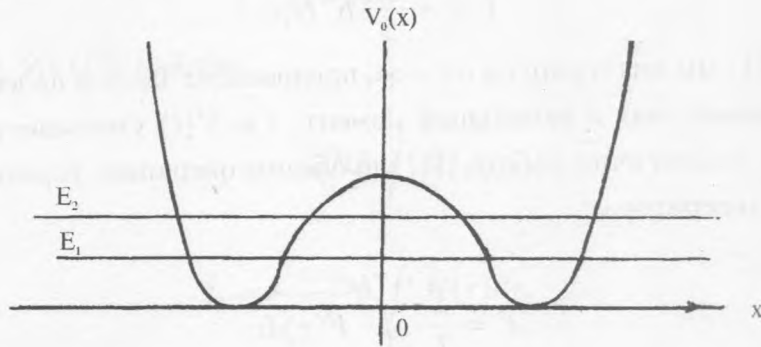


Рис. 1. Потенциальная энергия  $V_0(x)$ ,  $E_{1,2}$  – уровни энергии невозмущенного Гамильтониана.

Оператор дипольного момента можно записать в виде

$$\hat{d} = d\sigma_z. \quad (7)$$

В двухуровневом приближении роль волновой функции будет играть столбец  $\begin{pmatrix} b_r \\ b_l \end{pmatrix}$ , где  $b_r, b_l$  – коэффициенты разложения произвольного состояния  $|\psi\rangle$  по состояниям  $|r\rangle$  и  $|l\rangle$  соответственно из (5). Для наших целей удобно убрать диагональные члены в (6) с помощью преобразования

$$\hat{T}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V(\tau)\sigma_z d\tau\right). \quad (8)$$

При этом новая волновая функция будет определяться выражением

$$\begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} b_r \\ b_l \end{pmatrix}, \quad (9)$$

а гамильтониан в этом представлении примет вид

$$\hat{H}_T = \hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} - i\hbar\hat{T}\frac{\partial\hat{T}^{-1}}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2} \begin{pmatrix} 0 & K(t) \\ K^*(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$K(t) = \exp\left(\frac{2i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V(\tau)d\tau\right). \quad (11)$$

Вместо уравнения Шредингера мы получим два связанных уравнения

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}K(t)\bar{l}, \\ \dot{\bar{l}} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}K^*(t)r.\end{aligned}\quad (12)$$

Заметим, что в (11) мы интегрируем от  $-\infty$ , предполагая здесь и далее адиабатичность включения взаимодействия в начальный момент, т.е.  $V(t)$  умножается фактически на  $e^{-\alpha|t|}$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Аналогично работе [11] определим операцию усреднения за время  $T$  любой величины (оператора):

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} F(\tau) d\tau.\quad (13)$$

Тогда

$$F = \bar{F} + \tilde{F},\quad (14)$$

где  $\tilde{F}$  – "быстрая" часть  $F$ .

Время усреднения выберем так, чтобы  $\frac{1}{\omega_j} \ll T \ll \tau$ , где  $\tau$  – время характерного изменения  $r, \bar{l}$ . Например, для туннелирования  $\tau \sim \frac{1}{\omega_{21}}$ , т.е. наше усреднение пригодно при  $\omega \gg \omega_{21}$  (приближение, которое и используется в работах [3, 4]). Усредняя (12) с учетом (13) и (14), получим "медленные" уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}(\bar{K}\bar{l} + \widetilde{\bar{K}}\bar{l}), \\ \dot{\bar{l}} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}(\bar{K}^*\bar{r} + \widetilde{\bar{K}^*}\bar{r}),\end{aligned}\quad (15)$$

и "быстрые" уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{r}} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}(\bar{K}\tilde{l} + \tilde{K}\bar{l} + \widetilde{\tilde{K}}\tilde{l}), \\ \dot{\tilde{l}} &= -\frac{i\omega_{21}}{2}(\bar{K}^*\tilde{r} + \tilde{K}^*\bar{r} + \widetilde{\tilde{K}^*}\tilde{r}).\end{aligned}\quad (16)$$

Систему (16) будем решать методом последовательных приближений, полагая  $\bar{r}, \bar{l}$  – постоянными, а

$$\tilde{r}(-\infty) = \tilde{l}(-\infty) = 0 \quad (\tilde{r}(0) = \tilde{l}(0) = 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \tilde{r}_0 + \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 + \dots \\ \tilde{l} &= \tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

причем  $\tilde{r}_0 = \tilde{l}_0 = 0$ . Из (16) найдем

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= -\frac{i\omega_{21}}{2} \bar{l} \int_{-\infty}^t \tilde{K}(\tau) d\tau, \\ \tilde{l}_1 &= -\frac{i\omega_{21}}{2} \bar{r} \int_{-\infty}^t \tilde{K}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

а высшие приближения определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{r}_n &= -\frac{i\omega_{21}}{2} (\bar{K}(t) \int_{-\infty}^t \tilde{l}_{n-1}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \tilde{K}(\tau) \tilde{l}_{n-1}(\tau) d\tau), \\ \tilde{l}_n &= -\frac{i\omega_{21}}{2} (\bar{K}^*(t) \int_{-\infty}^t \tilde{r}_{n-1}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \tilde{K}^*(\tau) \tilde{r}_{n-1}(\tau) d\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Вычисляя  $\tilde{r}_n, \tilde{l}_n$  и подставляя в (17), а затем в (15), мы получим систему двух связанных уравнений, аналогичных исследованным нами раньше [9, 11]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}} &= i\alpha_r \bar{r} - i\beta_{r1} \bar{l}, \\ \dot{\tilde{l}} &= i\alpha_l \bar{l} - i\beta_{l1} \bar{r}, \end{aligned} \quad (20)$$

к которым необходимо добавить начальные условия  $\bar{r}(-\infty) = r_0, \bar{l}(-\infty) = l_0$  или  $(\bar{r}(0) = r_0$  и т.п.). Вычислять  $\alpha, \beta$ , используя (17) - (19), весьма сложно из-за большого числа слагаемых, особенно для высших порядков и при действии нескольких внешних полей  $E(\omega_j) \cos(\omega_j t + \varphi_j)$ . Однако вычисления можно сделать наглядными и простыми, если использовать Фейнмановские диаграммы, как в работе [11].

Выражение для  $K(t)$  из (11) представим в виде

$$K(t) = \exp \left[ \frac{2i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d \sum_{j=1}^N E(\omega_j) \cos(\omega_j \tau + \varphi_j) d\tau \right] = \prod_{j=1}^N \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s \left( \frac{2dE(\omega_j)}{\hbar\omega_j} \right) e^{is(\omega_j t + \varphi_j)} \right]. \quad (21)$$

При этом мы использовали известную формулу [12]

$$e^{iz \sin \Phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\Phi} J_s(z),$$

где  $J_s(z)$  – функция Бесселя 1-го рода  $s$ -порядка. Усредняя (21), получим

$$\begin{aligned} \bar{K}(t) &= \prod_{j=1}^N J_0 \left( \frac{2dE(\omega_j)}{\hbar\omega_j} \right), \\ \tilde{K}(t) &= \prod_{j=1}^N \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} J_s \left( \frac{2dE(\omega_j)}{\hbar\omega_j} \right) e^{is(\omega_j t + \varphi_j)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вклады в  $\alpha$  и  $\beta$  будем представлять в виде диаграмм по следующим правилам:

1. Диаграмма состоит из прямых (электронных) и волнистых (фотонных) линий и узлов.

2. В каждый узел входит слева прямая линия, соответствующая состоянию  $r(l)$ , а выходит прямая линия, соответствующая состоянию  $l(r)$ . В каждый узел при этом входят  $N$  волнистых линий по числу взаимодействующих полей с частотой  $\omega_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

3. Волнистые линии входят в узел сверху, если соответствуют "поглощению" одновременно  $k_j$  фотонов с частотой  $\omega_j$ . Волнистая линия выходит из узла снизу, если соответствует излучению  $k_j$  фотонов (в обоих случаях  $k_j$  может быть равно нулю). На каждой волнистой линии пишем  $k_j\omega_j$ . Например, некоторые узлы в случае трех полей с частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  изображены на рис. 2а.

4. Прямые линии диаграммы между узлами называются "внутренними", а две остальные, обозначаемые стрелками, называются "внешними". Стрелки на внешних линиях направлены слева направо, что соответствует последовательности приближений.

5. Диаграммы бывают двух сортов:

- а) "внешние" (входная и выходная) линии одинаковы и диаграмма дает вклад в  $\alpha$ ;
- б) "внешняя" входная линия  $r(l)$  отличается от выходной  $l(r)$  – диаграммы дают вклад в  $\beta$ .

6. Число узлов в диаграмме совпадает с порядком теории возмущений и каждому узлу соответствует множитель  $(-\omega_{21}/2)$ .

7. Каждой нижней волнистой линии с индексом  $p\omega_j$  соответствует множитель  $J_p \left( \frac{2dE(\omega_j)}{\hbar\omega_j} \right)$ , а верхней волнистой линии с индексом  $p\omega_j$  – множитель  $(-1)^p J_p \left( \frac{2dE(\omega_j)}{\hbar\omega_j} \right)$ .

При этом каждой волнистой линии с индексом  $p\omega_j$  узла, в который слева входит прямая  $r$ -линия, следует приписать дополнительный множитель  $(-1)^p$ .

8. Каждой внутренней линии в диаграмме соответствует дробный множитель  $1/(\sum_i p_i \omega_i - \sum_j q_j \omega_j)$ , где  $\sum_i p_i \omega_i$ ,  $\sum_j q_j \omega_j$  – сумма индексов всех "излученных" (нижних) и "поглощенных" (верхних) волнистых линий соответственно в узлах, стоящих слева от данной внутренней линии. Заметим, что в силу операции  $\sim$  эти знаменатели не обращаются в нуль.

9. Вклад от каждой диаграммы нужно умножить на символ Кронекера  $\delta(\sum_i p_i \omega_i - \sum_j q_j \omega_j)$  и  $\exp[i(\sum_i p_i \varphi_i - \sum_j q_j \varphi_j)]$ , где суммы индексов берутся по всем волнистым линиям диаграммы (первая сумма – по нижним, а вторая – по верхним).

Заметим, что диаграммы с четным числом узлов дают вклад только в  $\alpha$ , а с нечетным – вклад только в  $\beta$ . Можно показать, что  $\alpha_r = \alpha_l = \alpha$ , а  $\beta_{lr}^* = \beta_{rl} = \beta$ . Равенство  $\alpha_l = \alpha_r$  – достаточное основание, чтобы их не рассматривать, т.к. они приводят к одинаковому энергетическому сдвигу вырожденных состояний  $r, l$  и этот сдвиг можно убрать каноническим преобразованием.

Таким образом достаточно рассмотреть "медленные" уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= -i\beta\bar{l}, \\ \dot{\bar{l}} &= -i\beta^*\bar{r},\end{aligned}\quad (23)$$

решение которых будет иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{r} &= Ae^{i|\beta|t} + Be^{-i|\beta|t}, \\ \bar{l} &= -\frac{|\beta|}{\beta}(Ae^{i|\beta|t} - Be^{-i|\beta|t}),\end{aligned}\quad (24)$$

где  $A, B$  – постоянные, определяемые из начальных условий. При так называемых [4] "туннельных" начальных условиях, когда

$$\bar{r}(0) = 1, \bar{l}(0) = 0, \quad (25)$$

а система в начальный момент пребывает в правой яме, решение (24) примет вид

$$\begin{aligned}\bar{r}(t) &= \cos(|\beta|t), \\ \bar{l}(t) &= \frac{i|\beta|}{\beta} \sin(|\beta|t).\end{aligned}\quad (26)$$

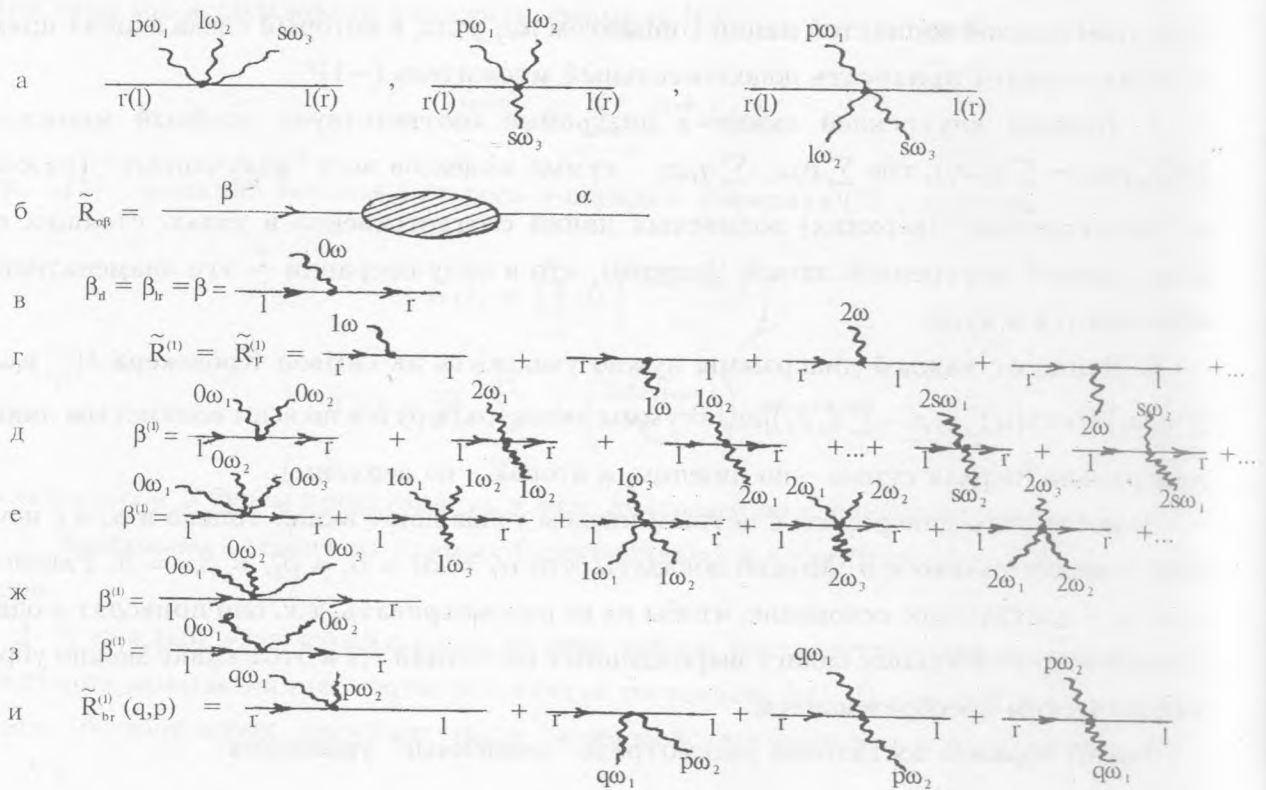


Рис. 2. Диаграммы, соответствующие  $\beta^{(1)}$  и  $\tilde{R}^{(1)}$ .

При "оптических" [4] начальных условиях, когда

$$\bar{r}(0) = \bar{l}(0) = 1/2 \tag{27}$$

и система в начальный момент находится в наимизшем собственном состоянии  $|\Psi_1\rangle$ , при вещественном  $\beta$  имеем

$$\bar{r} = \bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta t}. \tag{28}$$

Для вычисления дипольного момента нам могут потребоваться и  $\tilde{r}, \tilde{l}$ , которые будут описывать высокочастотные компоненты дипольного момента. В соответствии с (17) - (19) можно написать



$$\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{l} \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{rr} & \tilde{R}_{rl} \\ \tilde{R}_{lr} & \tilde{R}_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{l} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -R^* \\ R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{l} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Последнее приближенное равенство написано в первом приближении по взаимодействию, когда

$$\tilde{R}_{rr}^{(1)} = \tilde{R}_{ll}^{(1)} = 0, \quad \tilde{R}_{lr} = -\tilde{R}_{rl}^* = R. \quad (29')$$

Для вычисления  $\hat{R}$  каждому элементу матрицы  $\hat{R}$  можно поставить в соответствие сумму вкладов от диаграмм аналогичных предыдущим, с тем отличием, что правые выходные линии рисуются без стрелок, и они будут "внутренними" и им соответствует дробный множитель, как в пункте 8 предыдущих правил. Кроме того вместо множителей пункта 9 вклад от диаграммы нужно умножить на  $\exp i[\sum_i p_i(\omega_i t + \varphi_i) - \sum_j q_j(\omega_j t + \varphi_j)]$ , где суммы аналогичны таковым в пункте 9. Заметим, что ни один знаменатель вклада диаграммы не обращается в 0, а индексы матричных элементов  $\hat{R}$  должны соответствовать индексам крайних "электронных" линий (см., например, рис. 2б).

Рассмотрим конкретные примеры. Будем вычислять вероятности локализации в одной из ям:

$$P_r = \frac{\langle r | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{|r|^2}{|r|^2 + |l|^2} \approx |\bar{r}|^2 - 2Re\{\tilde{R}^{(1)} \bar{r} \bar{l}^*\},$$

$$P_l = \frac{\langle l | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{|l|^2}{|r|^2 + |l|^2} \approx |\bar{l}|^2 + 2Re\{\tilde{R}^{(1)} \bar{r} \bar{l}^*\}, \quad (30)$$

а также дипольный момент  $D$ . Используя (7), с точностью до  $0(\tilde{R}^{(1)})$  получим

$$D = \frac{\langle \Psi | d | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = d[|\bar{r}|^2 - |\bar{l}|^2 - 4Re\{\tilde{R}^{(1)} \bar{r} \bar{l}^*\}]. \quad (31)$$

Начнем со случая монохроматического поля частоты  $\omega$ . Результаты можно будет сравнить с данными, полученными другим методом в работах [4].

Рассмотрим случай с "туннельными" начальными условиями (25). Вычислим величину  $\beta$ . Соответствующая диаграмма в первом порядке показана на рис. 2в и

$$\beta_{rl} = \beta_{lr} = \beta = -\frac{\omega_{21}}{2} J_0 \left( \frac{2dE}{\hbar\omega} \right). \quad (32)$$

Диаграммы, соответствующие  $\tilde{R}^{(1)}$ , показаны на рис. 2г и

$$\tilde{R}^{(1)} = \tilde{R}_{lr}^{(1)} = \frac{\omega_{21}}{\omega} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2p+1}(e) \cos(2p+1)\omega t}{2p+1} - i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(e) \sin 2p\omega t}{2p} \right], \quad (33)$$

где  $e = \frac{2dE}{\hbar\omega}$ . Из (30), (26), (32), (33) с точностью до  $0(\tilde{R}^{(1)})$  получим

$$P_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\omega_{21} J_0(e)t) - \frac{\omega_{21}}{\omega} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(e) \sin(2p\omega t)}{2p} \sin(\omega_{21} J_0(e)t). \quad (34)$$

Подставляя (26), (33) в (31), получим дипольный момент

$$D = d \left[ \cos(\omega_{21} J_0(e)t) - \frac{2\omega_{21}}{\omega} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(e) \sin(2p\omega t)}{2p} \sin(\omega_{21} J_0(e)t) \right]. \quad (35)$$

В случае "оптических" начальных условий (27) из (28) следует, что  $|\vec{r}|^2 = |\vec{l}|^2 = 1/2$ . Выражения (32), (33) справедливы и в этом случае. Используя (30) и (31), получим

$$P_r = \frac{1}{2} - \frac{\omega_{21}}{\omega} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2p+1}(e) \cos((2p+1)\omega t)}{2p+1}, \quad (36)$$

$$D = 2d \operatorname{Re}\{\tilde{R}^{(1)}\} = \frac{2d\omega_{21}}{\omega} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2p+1}(e) \cos((2p+1)\omega t)}{2p+1}. \quad (37)$$

Выражение (35) для  $D$ , полученное в "туннельном" случае, совпадает с выражением из работ [4]. Когда  $e$  совпадает с корнем функции Бесселя  $J_0(e) = 0$ , согласно (34) возникает локализация электрона в правой яме:  $P_r = 1$ . Из (35) видно, что возможна генерация низких частот, а также генерация расщепленных четных гармоник.

При локализации ( $J_0(e) = 0$ ) низкочастотная генерация, расщепление часто гармоник и их амплитуды исчезают, но возникает постоянный диполь. В "оптическом" случае у нас, согласно (37), отсутствует низкочастотная генерация и постоянный диполь, нет генерации четных гармоник, а есть только нерасщепленные нечетные гармоники. Аналогичный результат в [4] содержит еще дополнительный низкочастотный член. Появление этого члена в [4] связано с особенностями мгновенного включения поля в начальный момент. Мы же предполагаем адиабатическое включение и поэтому у нас этот член отсутствует.

Рассмотрим теперь случай двух полей с соизмеримыми частотами  $\omega_1, \omega_2 = 2\omega_1$ . Диаграммы первого порядка, которые дают вклад в  $\beta$ , показаны на рис. 2д, и соответствующее  $\beta$  будет иметь вид

$$\beta = -\frac{\omega_{21}}{2}[J_0(e_1)J_0(e_2) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(e_2)J_{4p}(e_1) \cos(2p\Phi) + 2i \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(e_2)J_{2(2p+1)}(e_1) \sin((2p+1)\Phi)], \quad (38)$$

где  $e_j = \frac{2dE_j}{\hbar\omega_j}$ ,  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ . Условие локализации электрона в одной яме ( $\beta = 0$ ) принимает в зависимости от  $e_1, e_2$  и фаз  $\varphi_1, \varphi_2$  вид, отличный от случая одного поля  $\omega_1$ . Условие  $J_0(e_1) = 0$  или  $J_0(e_2) = 0$  недостаточно для локализации, т.к. в (38) есть еще члены, не равные нулю. В частном случае, когда  $\Phi = 0$ , условие локализации примет вид

$$J_0(e_1)J_0(e_2) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(e_2)J_{4p}(e_1) = 0. \quad (39)$$

Если  $e_1$  и  $e_2$  выберем так, что  $J_0(e_1) = 0$  ( $e_1 = 2, 40$ ),  $J_2(e_2) = 0$  ( $e_2 = 5, 14$ ), то первый (наибольший) член, отличный от нуля в (38), будет  $2J_4(e_2)J_8(e_1) \approx 7 \cdot 10^{-5}$ , а остальные члены будут значительно меньше. В этом случае локализация будет меняться очень медленно, а  $\beta$  будет отрицательным. Не меняя  $e_2$ , выберем  $e_1 = 2, 3$ , тогда  $J_0(e_1) = 0, 055$  при  $J_0(e_2) = -0, 13$  и левая часть (38) будет отрицательна, т.е.  $\beta > 0$ . В силу непрерывности при некотором  $e_1^* \in (2, 3; 2, 4)$  коэффициент  $\beta$  будет равен нулю. Таким образом, мы доказали существование локализации в этом частном случае.

Рассмотрим ситуацию трех полей с частотами  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . Диаграммы, дающие вклад в  $\beta$  в первом порядке показаны на рис. 2е и

$$\beta = -\frac{\omega_{21}}{2}[J_0(e_1)J_0(e_2)J_0(e_3) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(e_1)J_{2p}(e_2)J_{2p}(e_3) \cos 2\Phi + 2i \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(e_1)J_{2p+1}(e_2)J_{2p+1}(e_3) \sin(2p+1)\Phi], \quad (39')$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ .

Полагая  $\Phi = 0$  ( $\beta$  - вещественное),  $e_1 = 2, 40$ ;  $e_2 = 5, 14$ ;  $e_3 = 7, 50$ , получим  $J_0(e_1) = J_2(e_2) = J_4(e_3)$  и первый не исчезающий член в сумме для  $\beta$  будет малым:  $J_6(e_1)J_6(e_2)J_6(e_3) = 1, 7 \cdot 10^{-4}$ , т.е. локализация электрона в одной из ям "рассасывается" очень медленно. Небольшой вариацией  $e_1$ , как и в предыдущем случае, можно достичь полной локализации.

В случае действия  $n$ -полей с несоизмеримыми частотами  $\omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) единственная диаграмма, дающая вклад в  $\beta$ , показана на рис. 2ж, и, соответственно

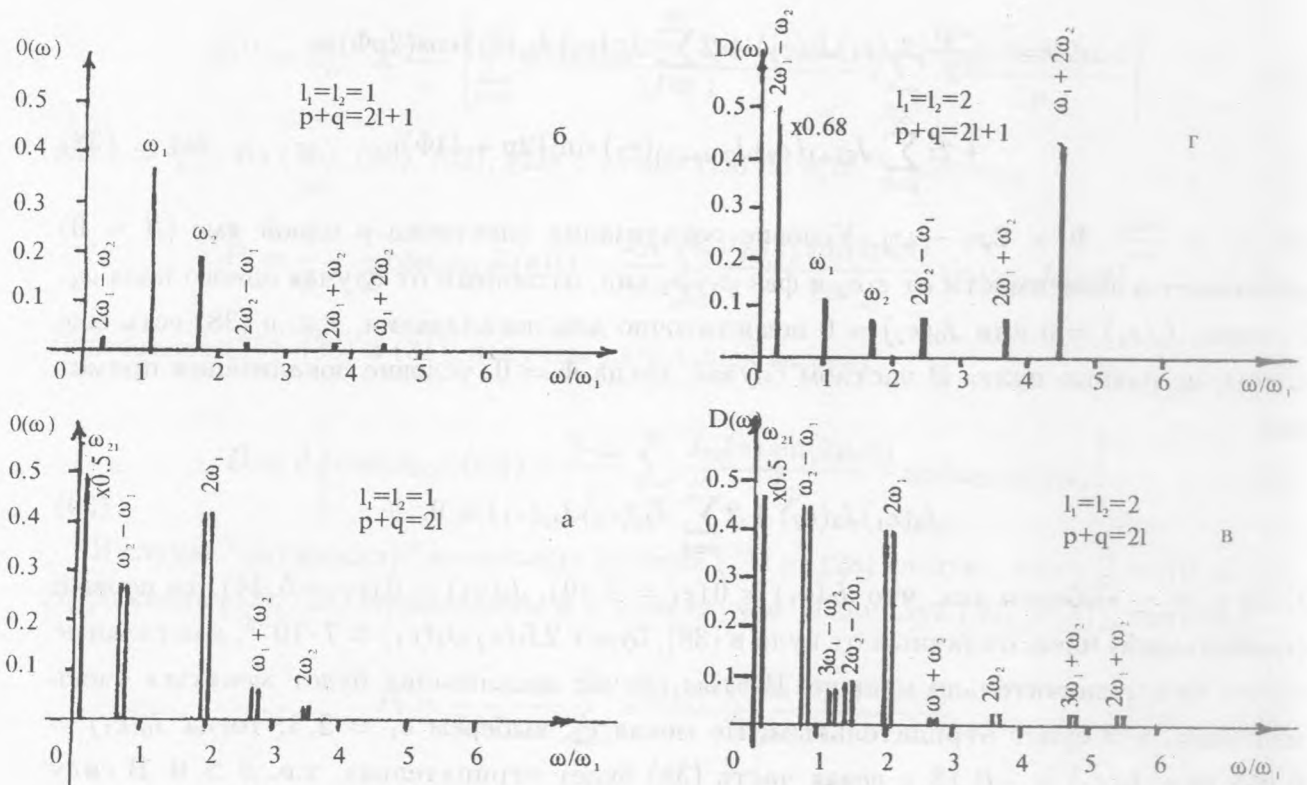


Рис. 3. Спектральные компоненты  $D(\omega)$  дипольного момента в произвольных единицах в присутствии двух полей с несоизмеримыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .  $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$ ;  $\omega_{21}/\omega_1 = 0,1$ ;  $\hbar\omega_{21} = 100 \text{ см}^{-1}$ ;  $\hbar\omega_1 = 1000 \text{ см}^{-1}$ ;  $d = 250 \text{ Д}$ . а) "туннельные" начальные условия;  $e_1 = e_2 = 1$  (интенсивности  $I_1 = 37,8 \text{ МВт/см}^2$ ,  $I_2 = 113,4 \text{ МВт/см}^2$ ,  $\omega'_{21}/\omega_1 = 0,06$ ). б) "оптические" начальные условия; остальное как в (а), в) "туннельные" начальные условия;  $e_1 = e_2 = 2$  ( $I_1 = 151,2 \text{ МВт/см}^2$ ,  $I_2 = 453,6 \text{ МВт/см}^2$ ,  $\omega'_{21}/\omega_1 = 0,02$ ). г) "оптические" начальные условия; остальное как в (в). Компоненты с амплитудой, меньшей 0,01, не показаны. Низкочастотная компонента  $D(\omega'_{21})$  на рис. 3а, в уменьшена в два раза. Компонента  $D(2\omega_1 - \omega_2)$  на рис. 3г уменьшена в 1,47 раза.

$$\beta = -\frac{\omega_{21}}{2} J_0(e_1) J_0(e_2) \dots J_0(e_n). \tag{40}$$

Для локализации ( $\beta = 0$ ) в этом случае достаточно, чтобы  $J_0(e_j) = 0$ , хотя бы для одного  $e_j$ .

Рассмотрим в заключение пару примеров излучения нашей системы в присутствии нескольких полей. Пусть на нее действует два поля с несоизмеримыми частотами  $\omega_1$  и

$\omega_2$ . Тогда единственная диаграмма, дающая вклад в  $\beta$  в 1-м приближении показана на рис. 2з и в этом случае

$$\beta = -\frac{\omega_{21}}{2} J_0(e_1) J_0(e_2), \quad (41)$$

а

$$\tilde{R}_{lr}^{(1)} = \sum_{p,q=0}^{\infty} R_{lr}(q,p), \quad (42)$$

где диаграммы, дающие вклад в  $R_{lr}(q,p)$ , показаны на рис. 2и и соответственно

$$R_{lr}^{(1)}(q,p) = \begin{cases} p+q=2l>0, \\ -i\omega_{21} J_q(e_1) J_p(e_2) \left[ \frac{\sin((q\omega_1+p\omega_2)t)}{q\omega_1+p\omega_2} + (-1)^p \frac{\sin((q\omega_1-p\omega_2)t)}{q\omega_1-p\omega_2} \right], \\ p+q=2l+1>0, \\ \omega_{21} J_q(e_1) J_p(e_2) \left[ \frac{\cos((q\omega_1+p\omega_2)t)}{q\omega_1+p\omega_2} + (-1)^p \frac{\cos((q\omega_1-p\omega_2)t)}{q\omega_1-p\omega_2} \right]. \end{cases} \quad (43)$$

Поскольку фазы  $\varphi_{1,2}$  в этом случае несущественны, мы положим  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . В случае "туннельных начальных условий" (25) из (31), (26), (43) получим дипольный момент

$$D = d \left\{ \cos(\omega_{21} J_0(e_1) J_0(e_2) t) + 2\omega_{21} \sin(\omega_{21} J_0(e_1) J_0(e_2) t) \times \right. \\ \left. \times \sum_{p+q=2l>0; p,q \geq 0}^{\infty} J_q(e_1) J_p(e_2) \left[ \frac{\sin((q\omega_1+p\omega_2)t)}{q\omega_1+p\omega_2} + (-1)^p \frac{\sin((q\omega_1-p\omega_2)t)}{q\omega_1-p\omega_2} \right] \right\}. \quad (44)$$

Откуда видно, что существует генерация с низкой частотой  $\omega'_{21} = \omega_{21} J_0(e_1) J_0(e_2)$  (первый член), которая при локализации ( $J_0(e_1) = 0$  либо  $J_0(e_2) = 0$ ) исчезает, и появляется постоянный дипольный момент. Диполь в (44) помимо четных гармоник  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , расщепленных на  $\omega'_{21}$  ( $q=0$  либо  $p=0$ ), содержит всевозможные "четные" ( $q+p=2l>0$ ), комбинационные тона  $q\omega_1+p\omega_2$  и  $|q\omega_1-p\omega_2|$ , также расщепленные на  $\omega'_{21}$ . Как и в "одноцветном" случае в условиях локализации это расщепление стремится к нулю. При совпадении  $e_1$  и  $e_2$  с корнем  $J_s(e)$  из спектра исчезают серии  $s\omega_1+p\omega_2$  и  $|s\omega_1-p\omega_2|$  или  $q\omega_1+s\omega_2$ ,  $|q\omega_1-s\omega_2|$  соответственно.

При "оптических" начальных условиях (27) из (31), (28), (43) следует, что дипольный момент будет иметь вид

$$D = d\omega_{21} \sum_{\substack{p+q=2l+1>0 \\ p,q \geq 0}}^{\infty} J_q(e_1) J_p(e_2) \left[ \frac{\cos((q\omega_1+p\omega_2)t)}{q\omega_1+p\omega_2} + (-1)^p \frac{\cos((q\omega_1-p\omega_2)t)}{q\omega_1-p\omega_2} \right]. \quad (45)$$

В этом случае в спектре присутствуют все нечетные гармоники  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $p = 0$  или  $q = 0$ ), а также всевозможные "нечетные" ( $p + q = 2l + 1 > 0$ ) комбинации частот:  $q\omega_1 + p\omega_2$  и  $|q\omega_1 - p\omega_2|$ . При совпадении  $e_1$  или  $e_2$  с корнем  $J_s(e)$  из спектра исчезают серии  $s\omega_1 + p\omega_2$  и  $|s\omega_1 - p\omega_2|$  или  $q\omega_1 + s\omega_2$  и  $|q\omega_1 - s\omega_2|$  соответственно. На рис. 3 показаны относительные спектральные компоненты  $D$  в обоих случаях, вычисленные по формулам (44) и (45) при некоторых значениях параметров.

Если частоты соизмеримы, например,  $\omega_1 = 2\omega_2$ , то ситуация усложняется.  $\beta$ , определяемое (39), и расщепление  $\omega'_{21} = |\beta|$  зависят от полей более сложным образом. В частности, появляется зависимость от разности фаз  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ . В остальном выражения для  $D$  идентичны (44) или (45) с тем отличием, что, в силу операции  $\sim$ , в суммах нужно исключить "резонансные" слагаемые при  $q\omega_1 - p\omega_2 = 0$ .

Таким образом с помощью метода усреднения Боголюбова [10] и диаграмм Фейнмана достаточно просто описать явления локализации и генерацию гармоник в случае двухуровневого двухъямного потенциала при наличии нескольких монохроматических полей. Условия локализации при этом усложняются, особенно в случае соизмеримых частот. В последнем случае проявляется зависимость от начальных фаз полей, что предоставляет дополнительные возможности для управления подобными явлениями, в частности, в квантоворазмерных структурах. Работа поддержана Министерством науки Российской Федерации как часть программы "Физика твердотельных наноструктур (проект 1-070/4).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lin W. A., Ballentine L. E. Phys. Rev. Lett., **65**, N 24, 2927 (1990).
- [2] Grossman F., Dittrich T., Jung P., Hanggi P. Phys. Rev. Lett., **67**, N 4, 516 (1991). Grossman F., Jung P., Dittrich T., Hanggi P. Zeitschrift für Physik B, **84**, 315 (1991).
- [3] Gomez Jose M. Plata Jesus, Phys. Rev., A **45**, N 10, R6958 (1992); Phys. Rev., A **49**, N 4, 2759 (1993).
- [4] Bavli Raanan, Metiu Horia. Phys. Rev. Lett., **69**, N 13, 1986 (1992); Phys. Rev., A **47**, N 4, 3299 (1993). Dakhnovskii Y., Bavli Raanan. Phys. Rev., B **48**, N 9, 11021 (1993). Bavli Raanan, Dakhnovskii Y. Phys. Rev. A **48**, N 2, 886 (1993).
- [5] Wagner M. Phys. Rev., B **49**, N 23, 16544 (1994-1); Phys. Rev., A **51**, N 1, 798 (1993).

- [6] Горбачевич А. А., Капаев В. В., Копаев Ю. В. ЖЭТФ, **107**, 1320 (1995).
- [7] Зельдович Я. Б. УФН, **110**, вып. 1, 139 (1973).
- [8] Shirley J. N. Phys. Rev., **138**, N 4B, B979 (1965).
- [9] Кирсанов Б. П., Селиваненко. Опт. и спектр. XXIII, N 6, 938 (1967).  
Кирсанов Б. П. Труды ФИАН, **18**, 187 (1968); Дис. канд. физ.-мат. наук. ФИАН, Москва, 1969.
- [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., ГИФМЛ, 1963.
- [11] Кирсанов Б. П., Кронгауз М. В. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1-2, 17 (1996).
- [12] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., Наука, 1973.

Поступила в редакцию 13 ноября 1996 г.