УДК 533.93

О ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВИСТЛЕРОВ

С. А. Болдырев

Рассмотрена слабая турбулентность вистлеров, распространяющихся под большими углами к внешнему магнитному полю, когда основными нелинейными взаимодействиями являются распады. Найдены анизотропные колмогоровские спектры и исследована их локальность.

Вистлеры (геликоны или спиральные волны) распространяются в бесстолкновительной магнитоактивной плазме при $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}$. При дополнительном предположении $\omega_{pe}^2 \gg k^2c^2$ спектр вистлеров имеет вид

$$\omega = k \mid k_z \mid c^2\omega_{He}/\omega_{pe}^2.$$

В изотермической плазме основными нелинейными взаимодействиями, определяющими слабую (волновую) турбулентность вистлеров, являются трехплазмонные распады

$$W = W_1 + W_2, \tag{1}$$

где W – энергия плазмона, и индуцированные рассеяния вистлеров на ионах и электронах. Колмогоровские спектры турбулентности (т.е. степенные стационарные спектры, определяемые постоянными потоками в k-пространстве сохраняющихся величин) могут существовать лишь в предельных случаях распространения вистлеров под большими либо малыми углами к внешнему магнитному полю. В этих случаях теория становится масштабно инвариантной по отношению к каждому из аргументов $k_\perp$ и k_z в отдельности, что позволяет искать стационарные спектры в виде $N_k \sim\mid k_z \mid^\alpha k_\perp^\beta$. В пределе малых углов $\cos^2\theta \approx 1$ распады подавлены законами сохранения энергии и импульса, и основными нелинейными взаимодействиями являются рассеяния на частицах, что приводит к стационарному спектру турбулентности $\mathcal{E}_\omega \sim \omega^{-1/2}$ [1]. В противоположном случае больших углов распространения $\cos^2\theta \ll 1$ доминируют распады. Будет показано, что в этом пределе также существуют степенные стационарные спектры.

При распадном взаимодействии (1) сохраняющимися величинами являются интегралы энергии и z-компоненты импульса волн. Наиболее интересен случай, когда последний интеграл отличен от нуля, поэтому будем считать, что волны распространяются преимущественно в одно полупространство $k_z > 0$.

Уравнение баланса для числа плазмонов N_k при распадном взаимодействии имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\mathbf{k}} = &-\int d^3k_1 d^3k_2 w(\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\times \\ &\times(NN_1 + NN_2 - N_1N_2)+ \\ &+\int d^3k_1 d^3k_2 w(\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\delta(\omega_1-\omega-\omega_2)\times \\ &\times(NN_1 + N_1N_2 - NN_2)+ \\ &+\int d^3k_1 d^3k_2 w(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\delta(\omega_2-\omega_1-\omega)\times \\ &\times(N_1N_2 - NN_2 - N_1N), \end{aligned} \tag{2}$$

где $N \equiv N_{\mathbf{k}}, N_1 \equiv N_{\mathbf{k}_1}, N_2 \equiv N_{\mathbf{k}_2}$. Для вычисления вероятности распада $w(\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)$ необходимо знать нелинейный отклик второго порядка $S_{ijk}(\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)$, определяемый выражением

$$\begin{aligned} j_i^N(\omega,\mathbf{k}) = 2\int d^3k_1 d^3k_2 S_{ijk}(\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\times \\ \times E_j(\omega_1,\mathbf{k}_1)E_k(\omega_2,\mathbf{k}_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать частицы плазмы замагниченными: $k_\perp V_{T\alpha} \ll \omega_{H\alpha}$ и $\omega \gg k_z V_{T\alpha}$. Тогда нелинейный ток (3) может быть вычислен на основе уравнений холодной магнитной гидродинамики для электронов, что приводит к следующему выражению для вероятности распада:

$$\begin{aligned} w = F\frac{k_{1z}k_{2z}}{k_z k_\perp k_{1\perp} k_{2\perp}}(k_\perp + k_{1\perp} + k_{2\perp})^2(k_{1\perp} - k_{2\perp})^2\times \\ \times\Delta^2(k_\perp, k_{1\perp}, k_{2\perp}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $F = (2\pi)^4 c^4 \omega_{He}^2/4n_0 m_e \omega_{He}\omega_{pe}^4$; Δ – площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{1\perp}, \mathbf{k}_{2\perp}$. Подробные вычисления отклика второго порядка приведены в [2]. Выражение (4) сразу записано в пределе больших углов; общее выражение восстанавливается заменой $k_\perp \to k, k_{1\perp} \to k_1, k_{2\perp} \to k_2$.

Каждый из членов выражения (2) проинтегрируем по углам в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и будем искать стационарный спектр в виде $N_k = Ak_z^{\alpha}k_{\perp}^{\beta}, k_z > 0$. Подставляя это выражение в (2) и осуществляя преобразование Захарова – Каца – Конторовича [3, 4] $k_{1z,\perp} \to k_{z,\perp}^2/k_{1z,\perp}, k_{2z,\perp} \to k_{z,\perp}k_{2z,\perp}/k_{1z,\perp}$ во втором члене (2) и аналогичное преобразование $k_{2z,\perp} \to k_{z,\perp}^2/k_{2z,\perp}, k_{1z,\perp} \to k_{z,\perp}k_{1z,\perp}/k_{2z,\perp}$ в третьем, приводим интеграл столкновений в (2) к виду:

$$\int dk_{1z}dk_{2z}dk_{1\perp}dk_{2\perp}k_{1\perp}k_{2\perp}w(kk_1k_2)\delta(k_z - k_{1z} - k_{2z})\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\times$$

$$\times A^2[1 - (k_z/k_{1z})^{2+2\alpha}(k_\perp/k_{1\perp})^{8+2\beta} - (k_z/k_{2z})^{2+2\alpha}(k_\perp/k_{2\perp})^{8+2\beta}]\times \tag{5}$$

$$\times[(k_zk_{1z})^{\alpha}(k_\perp k_{1\perp})^{\beta} + (k_zk_{2z})^{\alpha}(k_\perp k_{2\perp})^{\beta} + (k_{1z}k_{2z})^{\alpha}(k_{1\perp}k_{2\perp})^{\beta}].$$

Стационарные спектры находятся из условия равенства нулю интеграла столкновений (5). Легко проверить, что вторая квадратная скобка в (5) зануляется решениями: 1) $\alpha = -1, \beta = -1$, 2) $\alpha = -1, \beta = 0$, а первая – 3) $\alpha = -3/2, \beta = -9/2$, 4) $\alpha = -3/2, \beta = -4$. Первые два решения отвечают предельным случаям равновесного распределения $N_k \sim 1/(\omega + ak_z)$, зануляют тождественно каждый из трех членов в (2) и соответствуют нулевым потокам энергии и импульса в k-пространстве. Простые размерностные оценки показывают, что третье решение должно соответствовать постоянному потоку энергии, а четвертое – z-компоненты импульса в k-пространстве. Однако эти решения существуют только в том случае, если турбулентность локальна, т.е. если исходный интеграл столкновений в (2) сходится на спектрах, соответствующих решениям 3 и 4. Расходимости могут возникнуть при $k_1 \to 0$ и $k_1 \to \infty$. Условия сходимости при $k_1 \to \infty$ накладывают слабые ограничения на α и β, выполненные для 3 и 4. Рассмотрим подробнее наиболее опасный предел $k_1 \to 0$. Расходимости возникают от первого и третьего членов в (2). Обозначим $k_{1z} \equiv p_1$, $k_{1\perp} \equiv q_1$. При $p_1 \to 0, q_1 \to 0$ в силу наличия двух δ-функций имеем:

$$I_{st} \sim -\int_0\int_0 q^3p_1p^{-1}\Delta N_1[(2N - N(p - p_1, q + qp_1/p) -$$

$$-N(p + p_1, q - qp_1/p)) + 7p^{-1}p_1(N - N(p - p_1, q + qp_1/p))]dq_1dp_1,$$

$$\Delta = \frac{1}{2}qq_1(1 - q^2p_1^2/q_1^2p^2)^{1/2}.$$

Интегрирование ведется по области $0 \leq p_1/p \leq q_1/q$. Условие сходимости этого интеграла в нуле: $\alpha + \beta > -6, \alpha > -4$. Таким образом, спектр 3 нелокален – интеграл столкновений расходится логарифмически, тогда как спектр 4 соответствует локальному потоку z-компоненты импульса. Компоненты вектора потока z-компоненты импульса выражаются через производные интеграла столкновений по переменным α и β в точке $\alpha = -3/2$, $\beta = -4$ следующим образом [3]: $P_z = q^{-2}\partial I/\partial\alpha$, $P_\perp = p^{-1}q^{-1}\partial I/\partial\beta$, где I – безразмерный интеграл столкновений (5). Численные оценки дают $(\partial I/\partial\alpha)/(\partial I/\partial\beta) \simeq 3,13$, $\partial I/\partial\alpha > 0$, $\partial I/\partial\beta > 0$. Поток z-компоненты импульса направлен в сторону больших k.

В заключение отметим, что условие изотермичности плазмы, предполагавшееся выше, существенно, т.к. в случае $T_e \gg T_i$ возможно существование ионного звука в области $\omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{pi}$, и определяющую роль в формировании спектра могут играть распадные взаимодействия вистлеров со звуком и процессы нелинейной трансформации вистлеров в звук на частицах плазмы. Вероятности таких процессов и оценки для возможных спектров получены в [5]. Наше рассмотрение может также оказаться неприменимым, если частоты вистлеров попадают в интервал частот продольных волн, которые имеют следующую дисперсию [6] (учитываем, что углы велики):

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pe}^2\omega_{He}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}\cos^2\theta$$

при $\cos^2\theta \ll m_e/m_i$ и

$$\omega^2 \approx \omega_{Hi}\omega_{He}$$

при $\cos^2\theta \leq m_e/m_i$. В этом случае возможны распады вистлера на вистлер и продольную волну, причем из законов сохранения следует, что в этом процессе существенно изменяется $k_\perp$ вистлера, а не k_z (мы считаем, что магнитное поле не слишком велико: $\omega_{He} \ll \omega_{pe}^3/k^2c^2$). Такие процессы приводили бы к быстрой перекачке энергии по $k_\perp$ и медленной по k_z. Процесс же слияния двух вистлеров в продольную волну невозможен, т.к. законы сохранения в этом случае требуют, чтобы вистлеры имели k_z противоположных знаков, а мы считаем, что вистлеров с $k_z < 0$ нет.

Наше рассмотрение верно, когда распады с участием данных продольных волн запрещены, т.е. когда частоты вистлеров меньше частот продольных волн: $\omega^2 < \omega_{He}\omega_{Hi}$, что приводит к слабому ограничению на волновые векторы и углы распространения вистлеров:

$$k^2c^2\cos\theta/\omega_{pe}^2 \leq (m_e/m_i)^{1/2}.$$

Автор признателен В. Н. Цытовичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л и в щ и ц М. А., Ц ы т о в и ч В. Н., ЖЭТФ, **62**, N 2, 606 (1972).

[2] Л и в ш и ц М. А., Дисс. к.ф.-м.н., Москва, 1972.

[3] Z a k h a r o w V. E., L 'v o v V. S., F a l k o v i c h G., Kolmogorov's Spectra of Turbulence, Springer, Berlin 1992.

[4] К а ц А. В., К о н т о р о в и ч В. М., ЖЭТФ, **64**, N 1, 153 (1973).

[5] Л и в ш и ц М. А., Ц ы т о в и ч В. Н., ЖЭТФ, **63**, N 8, 540 (1972).

[6] А л е к с а н д р о в А. В., Б о г д а н к е в и ч Л. С., Р у х а д з е А. А., Основы электродинамики плазмы. М., Высшая школа, 1988, с. 112.

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 6 апреля 1994 г.
После переработки 15 января 1995 г.