УДК 539.19

КОММУТАТОРЫ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ АСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

В. К. Конюхов

Найдены условия, при которых коммутационные соотношения для компонент углового момента в системе координат, жестко связанной с вращающимся телом (body-fixed), оказываются такими же, как в неподвижной лабораторной системе координат (space-fixed).

Начиная с публикации О. Клейна [1] установилось мнение, что в системе координат, жестко связанной с вращающимся телом, коммутационные соотношения для компонент углового момента отличаются знаком от таких же соотношений в лабораторной системе координат. Эта точка зрения присутствует в монографиях по радиоспектроскопии [2 – 4], ядерной физике [5] и квантовой механике [6, 7]; имеется она и в журнальной литературе [8]. До настоящего времени к серьезным противоречиям это различие в коммутационных соотношениях не приводило. Настоящая публикация подготовлена с тем, чтобы показать, что различие в знаке коммутационных соотношений есть следствие соглашения об алгебраической связи между эрмитовыми и антиэрмитовыми операторами, которая определяется в общем случае с точностью до знака.

Основная идея работы [1] состоит в том, что уравнение движения для среднего значения $< P_k >$ компоненты углового момента, вычисленное по квантовой механике, должно совпадать по форме с уравнением движения компоненты момента, которое следует в классической механике из уравнения Эйлера для вращения твердого тела с одной закрепленной точкой. Исходя из этого выбирались коммутационные соотношения для $P_k\,(k = 1, 2, 3)$.

Приведем основные соотношения из классической механики твердого тела [9, 10]. Векторное уравнение движения твердого тела вокруг неподвижной точки, справедливое в любой системе координат, которая жестко скреплена с телом и вращается вместе с ним, имеет вид

$$\frac{d}{dt}M = [M,\Omega], \ A\Omega = M.$$

Здесь M – момент количества движения тела относительно неподвижной точки, A – оператор инерции, Ω – угловая скорость вращения. Уравнение проектируется на оси неподвижной относительно тела системы координат, о которой было сказано ранее. Эта система ориентирована так, что направления ее координатных осей совпадают с направлениями главных осей тензора инерции (оператора A). В этой системе координат тензор инерции диагонален и проекции векторов M, Ω пропорциональны $M_k = I_k\Omega_k \, (k = 1,2,3)$. Уравнения движения компонент имеют вид:

$$\frac{d}{dt}M_1 = (I_3^{-1} - I_2^{-1})M_2M_3, \ \frac{d}{dt}M_2 = (I_1^{-1} - I_3^{-1})M_3M_1, \ \frac{d}{dt}M_3 = (I_2^{-1} - I_1^{-1})M_1M_2.$$

Известно, что коммутатор $[H_1, H_2]$ двух эрмитовых операторов H_1 и H_2 является антиэрмитовым (косоэрмитовым) оператором [11]. Если умножить коммутатор на мнимую единицу, то $i[H_1, H_2]$ становится эрмитовым оператором, однако выбор знака $(\pm i)$ остается произвольным. Для каждой квантово-механической задачи знак устанавливается по соглашению и он остается неизменным для всех коммутаторов, которые возникают при решении задачи. Именно такая ситуация с двумя коммутаторами реализуется в задаче о движении асимметричного волчка. Первый коммутатор составляется из компонент углового момента $[P_j, P_k]$, где $j,k = 1,2,3$; во второй коммутатор $[H, P_j]$ входит гамильтониан (энергия вращения) и компонента углового момента. Два возможных варианта с выбором знака представлены в табл. 1 (S – антиэрмитов (косоэрмитов) оператор, H – эрмитов оператор).

Таблица 1

Условия коммутации асимметричного волчка в системе координат, жестко связанной с телом

Вариант A	Вариант B
$S = iH$	$S = -iH$
$[P_1, P_2] = i\hbar P_3$	$[P_1, P_2] = -i\hbar P_3$
$[P_2, P_3] = i\hbar P_1$	$[P_2, P_3] = -i\hbar P_1$
$[P_3, P_1] = i\hbar P_2$	$[P_3, P_1] = -i\hbar P_2$
$i\hbar \frac{d}{dt} < P > = < [H,P] >$	$-i\hbar \frac{d}{dt} < P > = < [H,P] >$
$-i\hbar \frac{d}{dt} \mid \Psi(t) > = H \mid \Psi(t) >$	$i\hbar \frac{d}{dt} \mid \Psi(t) > = H \mid \Psi(t) >$

В работе [1] был реализован вариант (В), что объясняется использованием традиционной формы записи уравнения Шредингера (последняя строка таблицы), когда стационарное состояние с энергией E имеет временную зависимость вида $\exp(-iEt/\hbar)$. Из уравнения Шредингера следует [11] уравнение временной эволюции среднего значения $< P >$ наблюдаемой величины P (предпоследняя строка) и знак множителя $+i$ при коммутаторах эрмитовых операторов.

В качестве примера проведем необходимые вычисления для варианта (А).

$$H = E = aP_1^2 + bP_2^2 + cP_3^2, a = \hbar^2/2I_1, b = \hbar^2/2I_2, c = \hbar^2/2I_3;$$

$$[E, P_1] = \frac{1}{2I_2}[P_2^2, P_1] + \frac{1}{2I_3}[P_3^2, P_1] = \frac{1}{2I_2}\{P_2(P_2P_1) - (P_1P_2)P_2\} +$$

$$+\frac{1}{2I_3}\{P_3(P_3P_1) - (P_1P_3)P_3\} = +\frac{1}{2I_2}\{P_2(P_1P_2 - i\hbar P_3) - (i\hbar P_3 + P_2P_1)P_2\} +$$

$$+\frac{1}{2I_3}\{P_3(i\hbar P_2 + P_1P_3) - (P_3P_1 - i\hbar P_2)P_3\} = i\hbar\left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_2}\right)(P_2P_3 + P_3P_2);$$

$$\frac{d < P_1 >}{dt} = \frac{-i}{\hbar} < [E, P_1] > = \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_2}\right) < P_2P_3 + P_3P_2 > .$$

Это совпадает с уравнением движения компоненты M_1 в классическом случае.

Таким образом, в задаче о вращении асимметричного ротатора найдены условия, которые управляют выбором знака в коммутационных соотношениях для компонент углового момента. Если исходить из уравнения Шредингера в традиционной, стандартной форме (вариант В), то в правой части соотношений неизбежно появится знак минус. Коммутационные соотношения будут иметь стандартный вид со знаком плюс, такой же, как в лабораторной системе координат, только в том случае, если уравнение Шредингера записать в форме варианта (А).

Не следует думать, что двойственность в описании вращательного движения асимметричного волчка, которая устраняется дополнительным соглашением о форме записи уравнения Шредингера или о связи эрмитового и антиэрмитового операторов, есть свойство квантовой трактовки движения. Двойственность возможно обнаружить во многих задачах на вращение. Ее происхождение обусловлено выбором одной из двух возможных матриц вращения $g * g^{-1} = e$, прямой или обратной, которые связывают исходную и повернутую системы координат.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант MC6000.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K l e i n O., Z. Phys. B, **58**, 730 (1929).

[2] С т р е н д б е р г М., Радиоспектроскопия, М., ИЛ, 1956.

[3] Т а у н с Ч., Ш а в л о в А., Радиоспектроскопия, М., ИЛ, 1959.

[4] G o r d y W., C o o k R. L., Microwave Molecular Spectra, New York, Wiley, 1984.

[5] Б о р О., М о т т е л ь с о н Б., Структура атомного ядра. Том 1, М., Мир, 1971.

[6] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Квантовая механика, М., Наука, 1974.

[7] Д а в ы д о в А. С., Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.

[8] H a i n e r R. M., C r o s s P. C., K i n g G. W., J. Chem. Phys., **17**, 826 (1949).

[9] А р н о л ь д В. И., Математические методы классической механики, М., Наука, 1989.

[10] А р х а н г е л ь с к и й Ю. А., Аналитическая динамика твердого тела, М., Наука, 1977.

[11] С а д б е р и А., Квантовая механика и физика элементарных частиц, М., Мир, 1989.

Поступила в редакцию 2 декабря 1994 г.