

УДК 534.0517.9

ГЕНЕРАЦИЯ МЕДЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ИЗ ТРЕХ ПОЧТИ ОДИНАКОВЫХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е. И. Волков

Показано, что слабая расстройка по частотам колебаний при наличии диффузионного обмена медленной переменной вызывает аномальное увеличение интервалов между вспышками быстрой переменной среднего осциллятора. Внешний шум существенно уменьшает дисперсию распределения интервалов, обусловленную расстройкой.

При изучении ритмических процессов часто возникает задача выяснения природы временной изменчивости, которая может проявляться не только в виде естественных отклонений от основного периода, но и в виде генерации в одной системе нескольких колебаний, периоды которых отличаются по порядку величины. Такие проблемы естественно возникают при моделировании походок [1, 2], объяснении медленных ритмов в нейронных сетях, построенных из быстро осциллирующих нейронов, при анализе биохимических основ суточных ритмов [3] и т. п. Много лет назад была сформулирована общая гипотеза, что взаимодействия между элементами системы отвечают за временное разнообразие [4]. На языке теории динамических систем это означает, что возможны классы осцилляторов и типы взаимодействия между ними, которые приводят к существованию и/или сосуществованию нескольких устойчивых аттракторов с существенно разными временными характеристиками.

Ранее при изучении систем из двух и трех одинаковых осцилляторов было показано теоретически [5, 6, 7] и экспериментально [8, 9, 10], что диффузионный обмен порождает несколько предельных циклов с разными периодами. В частности, в незамкнутой цепочке из трех одинаковых релаксационных осцилляторов, обменивающихся медленными переменными, средний осциллятор, получая двойной диффузионный поток, может осциллировать значительно медленнее соседей и даже не совершать полноамплитудных

колебаний совсем (т.е. не генерировать вспышку), если соседи осциллируют в противофазном режиме. Термины "динамическая ловушка" [11, 12] или "полная расстройка" [10] были предложены ранее для этого режима.

В реальных системах трудно добиться полной идентичности осцилляторов и отсутствия внешнего шума. Поэтому в настоящей работе рассмотрена незамкнутая цепочка из трех осцилляторов с небольшой расстройкой по частотам между ними. Неожиданно обнаружено, что в заметной области значений параметров, задающих как свойства изолированного осциллятора так и силу связи, средний осциллятор демонстрирует тем большую вариабельность периодов, чем меньше расстройка.

Система уравнений с неймановскими граничными условиями имеет следующий вид (в безразмерных переменных) [13]:

$$\begin{aligned} dX_1/dt &= \eta_1 - 1,5X_1Y_1 - DX_1 - 0,5\gamma Y_1/(Y_1 + \delta) + C(X_2 - X_1) \\ \epsilon dY_1/dt &= k + 0,5X_1Y_1 - Y_1^2 - 1,5\gamma Y_1/(Y_1 + \delta) \\ dX_2/dt &= \eta_2 - 1,5X_2Y_2 - DX_2 - 0,5\gamma Y_2/(Y_2 + \delta) + C(X_3 + X_1 - 2X_2) \quad (1) \\ \epsilon dY_2/dt &= k + 0,5X_2Y_2 - Y_2^2 - 1,5\gamma Y_2/(Y_2 + \delta) \\ dX_3/dt &= \eta_3 - 1,5X_3Y_3 - DX_3 - 0,5\gamma Y_3/(Y_3 + \delta) + C(X_2 - X_3) \\ \epsilon dY_3/dt &= k + 0,5X_3Y_3 - Y_3^2 - 1,5\gamma Y_3/(Y_3 + \delta). \end{aligned}$$

В широкой области параметров система (1) имеет устойчивый предельный цикл, фазовый портрет и развертки которого приведены на рис. 1 в недавней работе [12]. В дальнейшем все параметры фиксированы за исключением $\eta_1, \eta_2 = \eta_3$ и C , которые задают период колебаний, асимметрию развертки и интенсивность диффузионного обмена, соответственно.

Динамика системы (1) изучалась численными методами и было обнаружено, что при $\epsilon \ll 0,1$ существуют несколько предельных циклов, которые легко классифицируются по числу субпериодов в полном периоде или на заданном интервале времени [11, 13]. Например, для одинаковых осцилляторов при $\eta = 2,1$ и $\epsilon = 0,03$ на интервале $0,145 < C < 0,42$ имеются, по крайней мере два аттрактора, обозначенных $3/2/3$ и $5/2/5$, что означает наличие трех и пяти вспышек быстрой переменной в первом и третьем осцилляторе на две вспышки в среднем осцилляторе: $T_1 = T_3 = 4,95 + 3,82 + 3,79$, $T_2 = 6,28 + 6,28$ ($C = 0,26$) для режима $3/2/3$ и $T_1 = T_3 = 5,23 + 3,52 + 3,84 + 3,75 + 3,43$, $T_2 = 9,88 + 9,88$ ($C = 0,305$) для $5/2/5$.

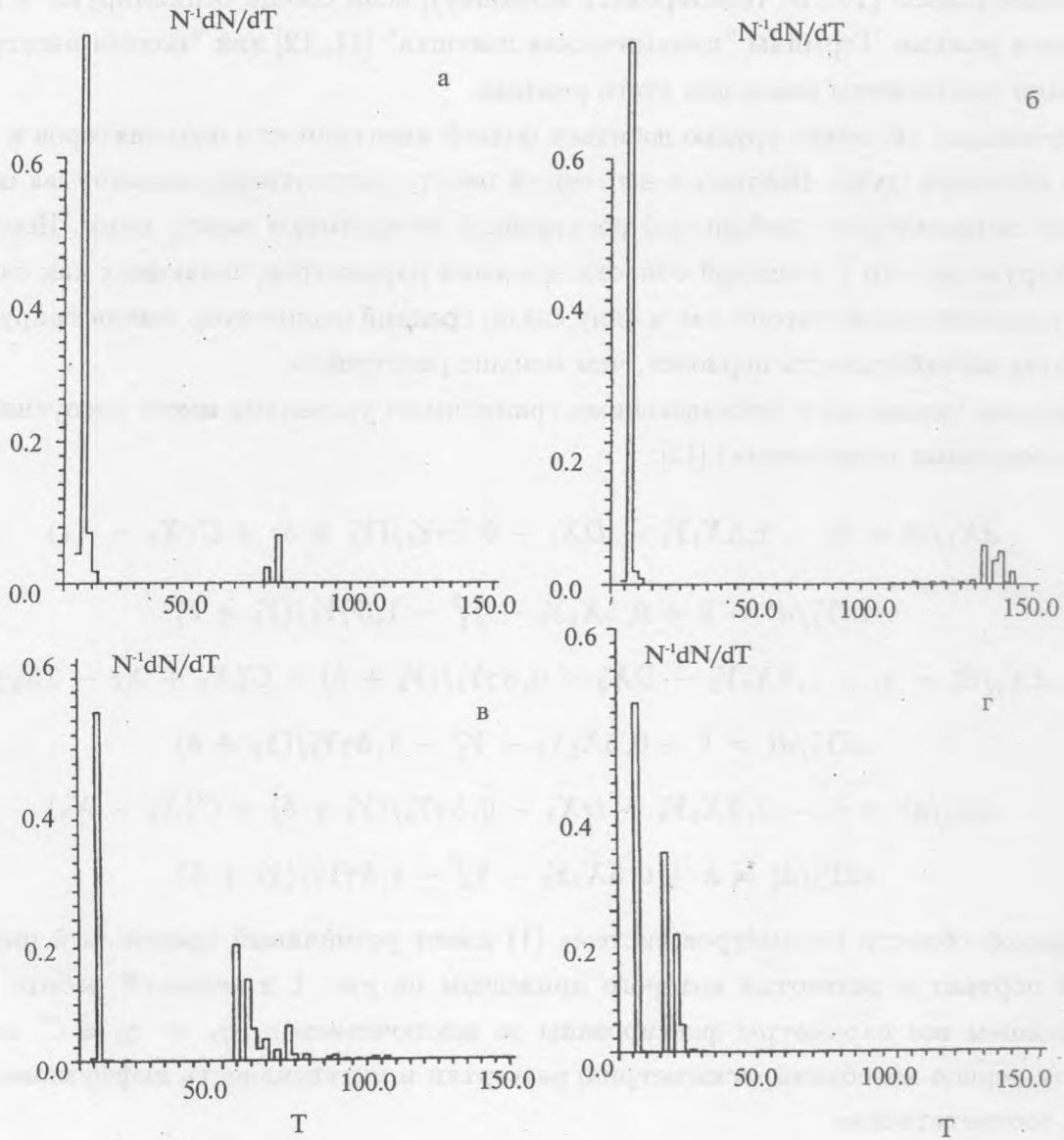


Рис. 1. Распределения межвспышечных интервалов в среднем осцилляторе при малой расстройке частот ($\eta_1 = 2.11$): а - $C = 0.245$, б - $C = 0.255$, в - $C = 0.263$, г - $C = 0.285$.

При наличии расстройки система (1) не имеет таких симметричных аттракторов, демонстрируя, как правило, отсутствие определенного периода из-за несоизмеримости частот. Будем характеризовать динамическое поведение распределением величин субпериодов (что совпадает с распределением интервалов между вспышками быстрой пере-

менной) для второго осциллятора при разных силах связи. Для малых расстроек, например, $\eta_1 = 2,11$, $\eta_2 = \eta_3 = 2,1$, что соответствует однопроцентному различию в периодах изолированных осцилляторов ($T_1 = 4,0$, $T_{2,3} = 4,044$), режим 3/2/3 возникает при связи $C = 0,159$ и имеет очень незначительные отличия между T_1 и T_3 . При увеличении связи при $C = 0,2399$ происходит резкий переход от режима 3/2/3 к режиму типа $i/j/k$, в котором числа субпериодов в полном периоде первого и третьего осцилляторов $i, k \gg j$, где j (число субпериодов для среднего осциллятора) много больше единицы, хотя в T_2 появляется очень долгий субпериод. Например, $T_2(C = 0,2404) = 63,7 +$ двадцать восемь коротких ($T = 6$) субпериодов. Дальнейшая эволюция системы с ростом силы связи представлена на рис. 1. При выбранных значениях остальных параметров продолжительность аномального субпериода растет с усилением обмена (рис. 1а, б) вплоть до $C = 0,26$. В этой области реализуется режим динамической ловушки, типичная развертка которого представлена на рис. 2 в [12]. Близко от этой области разброс длительностей аномальных субпериодов T_2 и частот их появления велик (рис. 1в). При еще большей диффузии медленной переменной межвспышечные интервалы укорачиваются (рис. 1г) и при $C = 0,3$ система с малой расстройкой имеет только синфазный аттрактор.

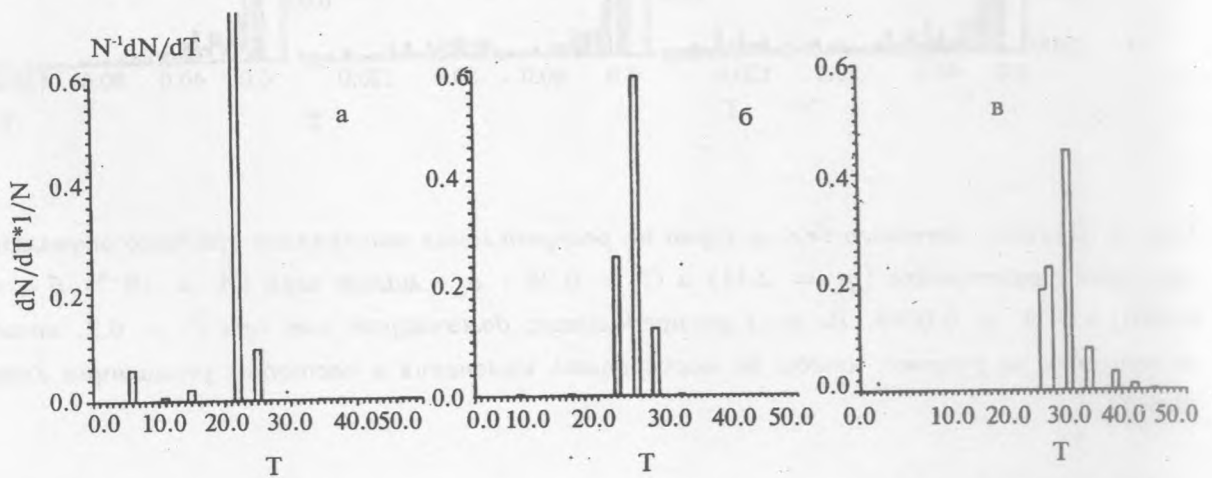


Рис. 2. Распределения межвспышечных интервалов в среднем осцилляторе при увеличенной расстройке частот ($\eta_1 = 2.14$): а - $C = 0.2425$, б - $C = 0.255$, в - $C = 0.29$.

При увеличении расстройки ($\eta_1 = 2,14$, что соответствует $T = 3,9$ для изолированного осциллятора) не наблюдается образования аномально больших интервалов

между вспышками быстрой переменной среднего осциллятора. На рис. 2 представлены распределения интервалов только для тех значений связи, при которых происходят качественные изменения. Сравнивая рис. 1а и 2а, легко видеть, что при большей расстройке система не генерирует очень большие субпериоды. Малые интервалы ($T = 6$) образуются очень редко и практически исчезают совсем при $C = 0,255$ (рис. 2б), после чего усиление диффузии приводит лишь к медленному росту величин субпериодов до значения $C = 0,28$. При еще больших связях существует лишь синфазный предельный цикл, хотя в процессе выхода на него генерация больших T_2 является типичным событием (рис. 2в).

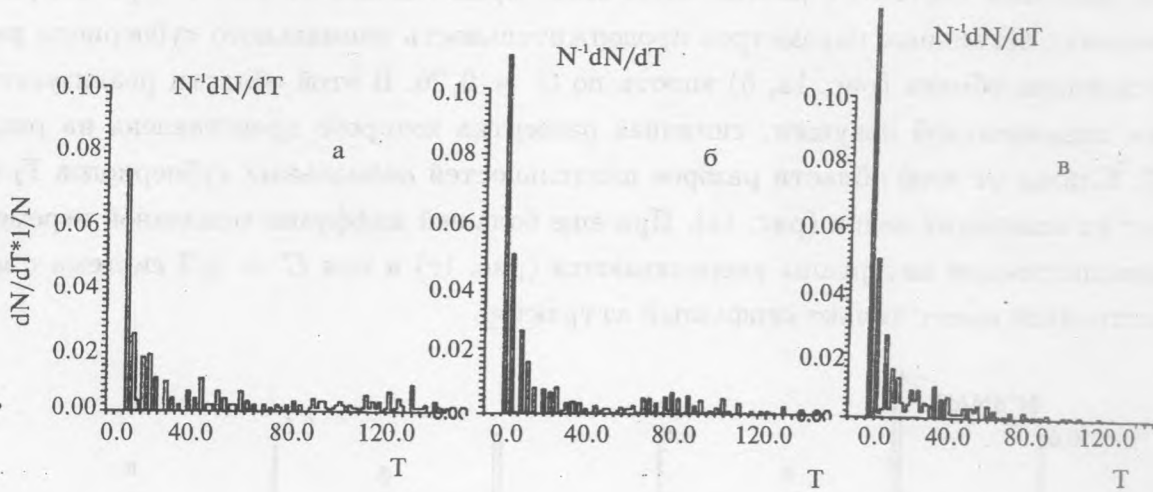


Рис. 3. Влияние внешнего белого шума на распределения интервалов среднего осциллятора при малой расстройке ($\eta_1 = 2.11$) и $C = 0.26$: а - малый шум ($A = 10^{-5}$), б - $A = 0.0001$, в - $A = 0.0008$. Во всех распределениях доминирует пик при $T = 6.2$, который не приведен на рисунке, чтобы не маскировать изменения в частотах реализации длинных циклов.

Существование динамической ловушки является необходимым, но недостаточным условием образования больших субпериодов. Расстройка частот порождает блуждание разностей фаз, которое может приводить к временному попаданию в режим ловушки. При малых расстройках частот время жизни ловушки может быть велико, что и дает долгие субпериоды. Устойчивый режим ловушки для одинаковых осцилляторов локализован в очень узкой области по C и крайне чувствителен к присутствию внешнего шума. В связи с этим целесообразно проверить влияние шума на эффект генерации больших

периодов. На рис. 3 представлено семейство распределений межвспышечных интервалов для $C = 0,26$ при разных амплитудах белого аддитивного шума, введенного путем замены η_1 на $\eta_1 + \xi_1$, где $\langle \xi_1 \rangle = 0$, $\langle \xi_1(t)\xi_j(t + \tau) \rangle = A\delta_{ij}\delta(\tau)$.

При очень малой интенсивности шум выявляет все величины субпериодов среднего осциллятора (рис. 3а), включая очень большие, что свидетельствует об образовании долгоживущей динамической ловушки. С ростом интенсивности шума дисперсия распределения уменьшается за счет исчезновения больших субпериодов (рис. 3б, в) вплоть до амплитуды шума $A = 10^{-3}$, при которой система переходит в режим синфазных колебаний. Интересно, что в отсутствие расстройки система покидает динамическую ловушку уже при $A = 5 \cdot 10^{-6}$, переходя в режим 3/2/3. Таким образом, малая расстройка не только порождает аномальную дисперсию межвспышечных интервалов, но и обеспечивает ее существование при разумных интенсивностях внешнего шума.

Найденные закономерности изменений в распределениях межвспышечных интервалов не являются специфичными для приведенных выше величин η и ϵ . Аналогичные результаты получены и для более жестких осцилляторов ($\epsilon = 0,01$) при разной степени асимметрии изолированных осцилляторов, по крайней мере в интервале $1,9 < \eta < 2,35$, который охватывает значительную часть всей области существования колебаний. По всей видимости, генерация изменчивости субпериодов за счет обмена медленной переменной не является специфичной и для исследованного осциллятора, так как важны лишь его внутренняя асимметрия и геометрия цепочки, причем неймановские граничные условия способны породить аномально большую изменчивость.

Работа выполнена в рамках проекта 94-01-00959 Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yuasa H., Ito M. Biol. Cybern., **63**, 177 (1990).
- [2] Collins J. J., Stewart I. Biol. Cybern., **68**, 287 (1993).
- [3] Kawato M., Suzuki R. J. Theor. Biol., **86**, 547 (1980).
- [4] Pavlidis T. J. Theor. Biol., **33**, 319 (1971).
- [5] Crowley M. F., Epstein I. R. J. Phys. Chem., **93**, 2496 (1989).
- [6] Dolnik M., Marek M. J. Phys. Chem., **92**, 2452 (1988).
- [7] Aronson D. G., Doedel E. J., Othmer H. G. Physica, **25D**, 20 (1987).
- [8] Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Phys. Rev., **47E**, 864 (1993).
- [9] Ashwin P., King G. P., Swift J. W. Nonlinearity, **3**, 585 (1990).

- [10] Ruwisch D., Bode M., Schutz P., Markus M. Phys. Lett., **186A**, 137 (1994).
- [11] Volkov E. I., Stolyarov M. N. J. Biol. Systems (в печати).
- [12] Волков Е. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9-10, 69 (1994).
- [13] Volkov E. I., Stolyarov M. N. Biol. Cybern., **71**, 451 (1994).

Поступила в редакцию 7 февраля 1995 г.

А Ч У Э А Ч Э Т И Д

И. И. Волков, М. Н. Столяров
Институт физики АН СССР
Москва, Россия

Волков Е. И., Столяров М. Н.
Краткие сообщения по физике ФИАН
Москва, Россия