

УДК 534.05179

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОВУШКА В СИММЕТРИЧНОЙ ЦЕПОЧКЕ ИЗ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е. И. Волков

В симметричной системе из трех нелинейных осцилляторов, связанных двунаправленной диффузией, обнаружено новое пространственно неоднородное решение, проведен его параметрический анализ и оценена чувствительность к внешнему шуму.

В данной работе мы продолжим изучение коллективных мод в цепочке из трех связанных мембранных осцилляторов [1, 2], каждый из которых описывается системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с существенно разными временами. Обмен медленной переменной является одним из вариантов ингибиторной связи, т.к. он способен существенно замедлять движение системы на значительных промежутках предельного цикла. Было показано, что такой обмен не разрушает устойчивость однородного состояния (синфазные колебания всех осцилляторов) и порождает несколько аттракторов с разными периодами. При циклических граничных условиях наибольший объем параметрического пространства занимают различные типы так называемых "вращающихся волн", периодических решений с одним или несколькими субпериодами, в которых развертки всех осцилляторов одинаковы и разности фаз между элементами цепочки равны трети периода [3, 4, 5]. Второй тип решения, противофазный аттрактор, характеризуется отсутствием разности фаз у двух осцилляторов, которые движутся со сдвигом в половину периода относительно третьего осциллятора. Существование обоих типов аттракторов не зависит от выбора математической модели нелинейного осциллятора [6] и было подтверждено в экспериментах на химических [7] и электронных [8] системах. В перечисленных аттракторах наличие связи может резко менять формы разверток колебаний всех осцилляторов. Однако максимальные значения амплитуд мало отличаются от амплитуды изолированного осциллятора. В цепочках релаксационных осцилляторов связь по медленной переменной существенно

меняет величины межвспышечных интервалов в обоих аттракторах, но все осцилляторы генерируют практически одинаковые вспышки.

В настоящей работе показано, что в системе из трех циклически связанных одинаковых (или почти одинаковых) осцилляторов существует пространственно неоднородный предельный цикл, в котором только два осциллятора совершают полноамплитудные колебания с генерацией вспышек быстрой переменной. Их временные развертки одинаковы, но сдвинуты на половину периода, что обеспечивает подавление циклирования третьего осциллятора за счет чередования потоков медленной переменной (ингибитора). Мы будем называть такой аттрактор "динамической ловушкой", т.к. переход любого двумерного элемента 6-мерного аттрактора в состояние близкое к стационарному происходит за счет динамики поведения соседей.

Простейший вариант мембранного осциллятора [1, 9] описывается следующей системой уравнений в безразмерных переменных:

$$\frac{dY}{dt} = \eta - k - \frac{3}{2}XY - DY - \frac{1}{2} \frac{\gamma X}{X + \delta} \quad (1a)$$

$$\epsilon \frac{dX}{dt} = k + \frac{1}{2}XY - X^2 - \frac{3}{2} \frac{\gamma X}{X + \delta}, \quad (1b)$$

где $Y(X)$ – безразмерная концентрация липидов (свободных радикалов), участвующих в цепной реакции свободнорадикального окисления в присутствии ингибитора, способного нейтрализовать радикалы. Концентрация $Y(t)$ поддерживается за счет внешнего притока, описываемого в простейшем случае постоянным параметром η , который рассматривается в дальнейшем как бифуркационный параметр. Величина Y уменьшается за счет взаимодействия с радикалами (член $-XY$ в (1a)), порождая образование новых радикалов (член $+XY$ в (1b)), но в процессах с разными стехиометрическими коэффициентами. Уменьшение концентрации радикалов определяется их рекомбинацией (член X^2) и взаимодействием с ингибитором (член $X/(X + \delta)$). Параметры k, γ , описывающие спонтанную скорость зарождения радикалов и скорость притока ингибитора, соответственно, считаются постоянными. Величина ϵ определяется отношением времен жизни молекул радикалов и липидов, которое много меньше единицы. При $\epsilon \ll 1$ развертка $X(t)$ содержит участки быстрого изменения переменной, соответствующие переходу с одной устойчивой ветви изоклины на другую.

Фазовый портрет изолированного осциллятора представлен на рис. 1 для $\epsilon = 0,1$. Сплошной линией показан предельный цикл, существующий в широкой области значений параметра η . При $\eta \simeq 3,61$ имеет место субкритическая бифуркация Хопфа,

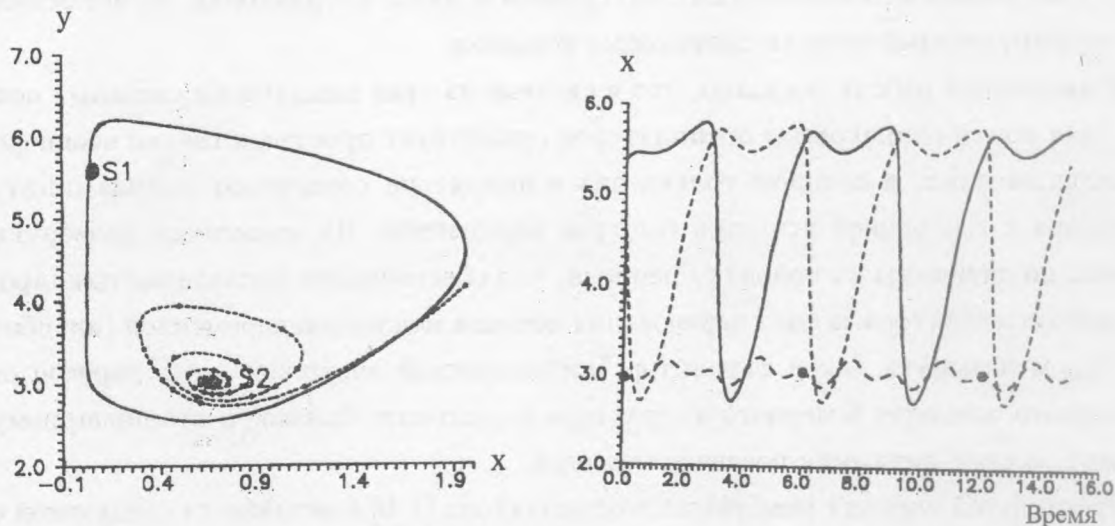


Рис. 1. Фазовые портреты изолированного осциллятора для $\epsilon = 0,1$: сплошная линия – предельный цикл при $\eta = 2,95$; $S1(S2)$ – устойчивые стационарные состояния, в которые переходит система (1) при $\eta = 1,7$ ($\eta = 3,8$). Пунктирная линия показывает траекторию выхода на устойчивый фокус.

Рис. 2. Развертки медленных переменных трех осцилляторов в режиме динамической ловушки при $\eta = 2,95$; $C = 0,24$; $\epsilon = 0,1$. Пунктирная линия с кружками соответствует малым колебаниям в области $S2$ (см. рис. 1).

приводящая к появлению устойчивого фокуса $S2$. Типичная траектория, ведущая в фокус при $\eta \simeq 3,8$, отмечена на рис. 1 пунктирной линией.

При наличии соседей к системе (1) следует добавить диффузионный обмен

$$C(Y_{i+1} + Y_{i-1} - 2Y_i), i, i + 1, i - 1 = 1, 2, 3 \pmod{3}$$

по медленной переменной Y .

Уравнения (1) решались традиционными численными методами, а алгоритмы поиска аттракторов подробно описаны в [1].

На рис. 2 приведены развертки медленных переменных для динамической ловушки в системе (1) при не очень большой релаксационности ($\epsilon = 0,1$) и $\eta = 2,95$. Существует такой интервал коэффициента диффузии C , в котором величина диффузионного потока, рассматриваемая как добавка к бифуркационному параметру η , почти всегда обеспечивает для одного осциллятора эффективное значение η , соответствующее устойчивому стационарному состоянию изолированного осциллятора, локализованному в районе $S2$

(см. рис. 1). Такое соотношение нарушается только в течение генерации вспышки в одном из осцилляторов, когда у запертого осциллятора эффективен только один "диффузионный" партнер. Но эти интервалы слишком коротки для того, чтобы изображающая точка успела достичь выхода на полноамплитудный цикл.

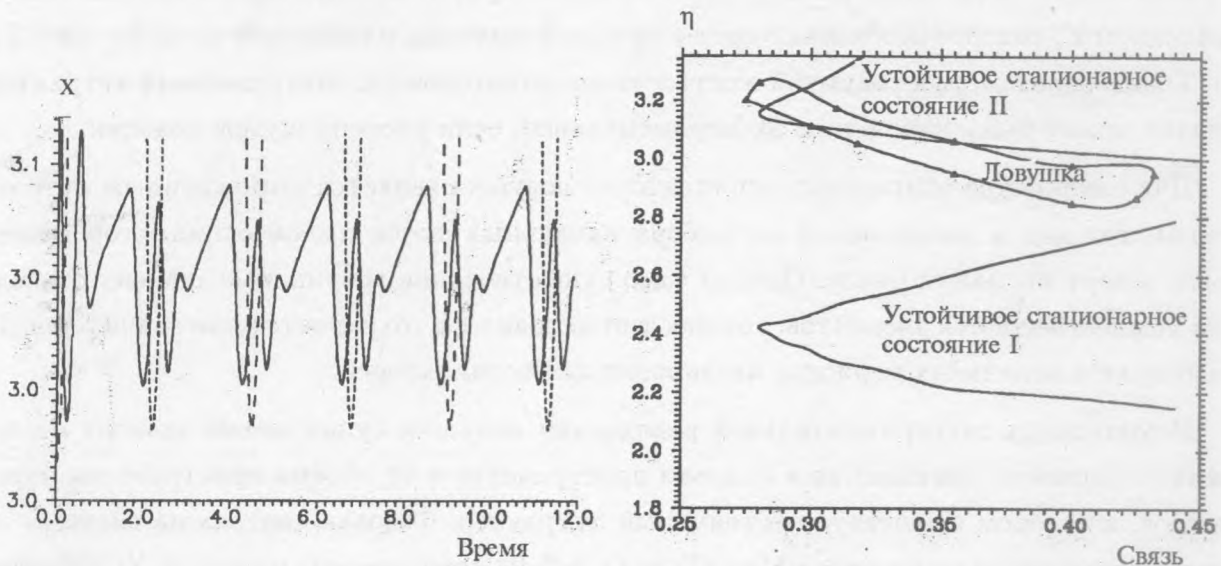


Рис. 3. Пример развертки медленной переменной запертого осциллятора (сплошная линия) для более релаксационных ($\epsilon = 0,01$) осцилляторов: $\eta = 2,95$; $C = 0,36$. Пунктирами показаны части траекторий двух других осцилляторов, совершающих полноамплитудные колебания.

Рис. 4. Фазовая диаграмма системы (1) при $\epsilon = 0,01$. Граница области существования ловушки помечена треугольниками. В области I два осциллятора имеют большие значения медленных переменных и малые величины быстрых переменных, в то время как третий осциллятор фиксирован при малом Y и большом X . В области II два осциллятора имеют малые Y и большие X , а третий осциллятор фиксирован около $S1$ (см. рис. 1).

Амплитуда малых колебаний запертого осциллятора и локализация его развертки относительно минимального значения медленной переменной определяется величиной параметра ϵ . Как видно из рис. 3, на котором представлена часть временных разверток для $\epsilon = 0,01$, образование ловушки зависит от весьма тонких деталей поведения разверток вблизи точки перехода к полноамплитудным колебаниям, что означает, в свою очередь, повышение чувствительности найденного аттрактора к внешнему шуму. Для количественной оценки реальности существования динамической ловушки

введем в каждый осциллятор аддитивный белый шум ξ_i со следующими свойствами: $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t)\xi_j(t+\tau) \rangle = A\delta_{ij}(\tau)$. Расчеты показывают, что шум с амплитудой $A = 10^{-5}$ разрушает ловушку при $\epsilon = 0,01$ в то время как при $\epsilon = 0,1$ ловушка существует вплоть до $A = (7-8) \cdot 10^{-5}$. Это увеличение интенсивности шума коррелирует с увеличением расстояния между траекторией запертого осциллятора и минимальным значением Y , которое необходимо достигнуть для перехода на большой цикл (ср. рис. 2 и 3). Таким образом, при разумной жесткости осцилляторов рассматриваемый аттрактор вполне может быть наблюдаем экспериментально, если уровень шумов невелик.

Для совершенно одинаковых осцилляторов ловушка является вырожденным аттрактором, так как в зависимости от выбора начальных точек любой осциллятор может быть заперт на малом цикле. Однако само существование ловушки не зависит от полной тождественности элементов, так как тип аттрактора сохраняется при значительных разбросах в величинах периодов изолированных осцилляторов.

Возможность экспериментальной реализации ловушки существенно зависит от величины бассейна притяжения в фазовом пространстве и от объема пространства параметров, в котором существует устойчивый аттрактор. Фазовая диаграмма системы из трех осцилляторов на плоскости $(\eta - C)$ для $\epsilon = 0,01$ представлена на рис. 4. Устойчивая ловушка существует внутри замкнутой области, отмеченной кругами. Она перекрывается с той ветвью устойчивых стационарных состояний, на которой два осциллятора имеют малые и одинаковые значения медленных переменных и большие величины быстрых переменных, а третий осциллятор покоится вблизи максимума медленной переменной на медленном участке предельного цикла. В области перекрытия аттракторов бассейн притяжения ловушки мал из-за конкуренции с устойчивыми стационарными состояниями, так как существует область в фазовом пространстве, где лишь незначительные различия в быстрой переменной отделяют ловушку от стационарного состояния. В остальной области существования единственным конкурентом ловушки являются синфазные колебания, устойчивые на всей плоскости $(\eta - C)$. В качестве грубой оценки размеров бассейна можно использовать отношение величин интервалов выбранной фазовой переменной, приводящих к разным аттракторам, при фиксированных значениях других переменных. Если начальная точка одного из осцилляторов выбрана вблизи максимума медленного участка цикла, то такие оценки показывают, что почти четверть начальных точек двух оставшихся медленных переменных, выбранных между Y_{max} и Y_{min} , приводят систему в динамическую ловушку.

Детальный численный анализ показал, что простая диффузия медленной перемен-

ной, которая способна замедлять движение изображающей точки по предельному циклу, может приводить к принципиальным изменениям в динамике связанных осцилляторов. При достаточно интенсивной взаимно симметричной диффузии в симметричной цепочке из трех одинаковых элементов образуется пространственно несимметричный аттрактор, в котором один из осцилляторов теряет способность к полноамплитудным колебаниям. Роль гипотезы о доминировании обмена ингибитором, которая была использована в расчетах, нуждается в дальнейшем изучении. Однако заранее ясно, что существуют среды, где более интенсивная диффузия ингибитора вполне естественна, например, в экспериментах по образованию стационарных диссипативных структур [10].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-01-00959).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Volkov E. I. and Stolyarov M. N., *Biol. Cybern.*, **71**, 451 (1994).
- [2] Volkov E. I. and Stolyarov M. N., *J. Biol. Systems* (in press).
- [3] Erneux T. and Herschkowitz-Kaufman M., *J. Chem. Phys.*, **66**, 248 (1977).
- [4] Endo T. and Mory S., *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-25**, 1, 7 (1978).
- [5] Ashwin P., King G. P., and Swift J. W., *Nonlinearity*, **3**, 585 (1990).
- [6] Collins J. J. and Stewart I., *Biol. Cybern.*, **71**, 91 (1994).
- [7] Yoshimoto M., Yoshikawa K., and Mori Y., *Phys. Rev. E*, **47**, 864 (1993).
- [8] Ruwisch D., Bode M., Schutz P., and Markus M., *Phys. Lett.*, **A186**, 137 (1994).
- [9] Волков Е. И., *Краткие сообщения по физике ФИАН*, N 9-10, 69 (1994).
- [10] Agladze K., Dulos E., and deKepper P., *J. Phys. Chem.*, **96**, 2400 (1992).

Поступила в редакцию 4 апреля 1995 г.

После переработки 24 апреля 1995 г.