УДК 535.14

К ВОПРОСУ О ДИФФУЗИИ И ЛОКАЛИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

С. М. Апенко, П. И. Арсеев, Н. К. Федоров

Рассмотрена задача о распространении излучения в среде разупорядоченных двухуровневых атомов. Указывается на возможность локализации фотонов с частотой, близкой к резонансной. В выходящем за рамки однофотонной задачи приближении среднего поля оценена критическая концентрация атомов, при которой наступает локализация света. Показано, что увеличение интенсивности излучения приводит к подавлению локализационных эффектов.

Рассмотрим задачу о резонансном взаимодействии света с системой случайно расположенных двухуровневых атомов. Гамильтониан системы выберем в виде, который обычно используется при анализе сверхизлучения [1]:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \sum_k \left(g_k R_k^+ a_k + g_k^* a_k^+ R_k^- \right) + \frac{\varepsilon}{2} R_3, \tag{1}$$

где a_k^+, a_k – операторы рождения и уничтожения фотонов с волновым вектором k, $\omega_k = ck$, где c – скорость света, операторы $R^\pm$ и R_3 определены согласно

$$R_k^\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_\pm^{(i)} e^{\pm ikr_i}, \qquad R_3 = \sum_{i=1}^N \sigma_3^{(i)}, \tag{2}$$

где $\sigma_3^{(i)}$, $\sigma_\pm^{(i)} = \sigma_1^{(i)} \pm i\sigma_2^{(i)}$ – матрицы Паули, описывающие двухуровневый атом с расстоянием между уровнями ε, расположенный в точке r_i, а

$$g_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}} \langle 1|\mathbf{j}^+\mathbf{e}_\lambda|0\rangle, \qquad \mathbf{j}^+ = i\frac{\varepsilon}{\hbar}\mathbf{d} \tag{3}$$

матричный элемент дипольного перехода между атомными уровнями $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

Вначале мы рассмотрим локализацию одного фотона, находящегося в такой неупорядоченной среде. Тогда в одночастичной задаче двухуровневые атомы можно заменить гармоническими осцилляторами с частотой $\varepsilon/\hbar$ и пользоваться упрощенным гамильтонианом

$$H_1 = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \sum_{k,i} \left(g_k e^{ikr_i} c_i^+ a_k + g_k^* e^{-ikr_i} a_k^+ c_i \right) + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon c_i^+ c_i, \tag{4}$$

где c_i^+, c_i – операторы рождения и уничтожения для i-го осциллятора. Действительно, для гамильтониана H_0 имеется очевидный интеграл движения $n = \sum_i c_i^+ c_i + \sum_k a_k^+ a_k$, равный сумме возбуждений в системе, и поэтому, если первоначально существовал только один фотон, а атомы находились в невозбужденном состоянии, то есть $n = 1$, то в дальнейшем фотон будет просто поглощаться и переизлучаться снова таким образом, что более высокие уровни осциллятора, кроме первого возбужденного, никак не будут задействованы и в этом смысле система не будет отличаться от системы двухуровневых атомов. Для дальнейшего удобно ввести константу взаимодействия γ согласно

$$g_k = \gamma \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$$

и оператор фотонного поля в точках расположения атомов

$$\phi(r_i) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikr_i} a_k.$$

В дальнейшем нормирующий объем V положен равным 1.

Тогда, переходя стандартным образом к представлению взаимодействия, можно записать гамильтониан взаимодействия света с веществом в виде

$$V(t) = \gamma \sum_i \left(c_i^+(t)\phi(r_i,t) + \phi^+(r_i,t)c_i(t) \right),$$

после чего получаем диаграммную технику с очень простыми правилами. Фотонным линиям соответствуют функции Грина $iD_{i,j}^0$, где

$$D_{i,j}^0(\omega) = \sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(r_i - r_j)} \frac{1}{\omega - \omega_k + i0}, \tag{5}$$

а атомным линиям – $iG_{i,j}^0$, где

$$G^0_{i,j}(\omega) = \delta_{i,j}\frac{1}{\omega - \varepsilon + i0}. \tag{6}$$

В диаграммах также присутствуют вершины, в которых одни функции Грина переходят в другие и которым соответствуют множители $-i\gamma$.

Атомная функция Грина $\bar{G}$ определяется уравнением Дайсона

$$\bar{G}_{i,j} = G^0_{i,j} + \gamma^2 G^0_{i,l} D^0_{l,m} \bar{G}_{m,j}. \tag{7}$$

Решение этого уравнения упрощается в некоторых предельных случаях [2]. Если атомы занимают область меньше длины волны света λ, функция $D^0_{l,m}$ не зависит от l и m. Это приводит к эффектам типа сверхизлучения, при которых вероятность спонтанного излучения увеличивается в N раз (N – число фотонов). В другом предельном случае, которым мы и будем интересоваться, $\lambda \ll r_0$ – расстояния между атомами. При этом вследствие быстрых осцилляций множителя $e^{ik(r_l - r_m)}$ в правой части уравнения (7) функция $D^0_{l,m} \sim \delta_{l,m}$. Будем считать размеры образца много большими средней длины свободного пробега фотона [3]. Решение уравнеия (7) для $\bar{G}_{i,j}$ имеет вид

$$\bar{G}_{i,j} = \delta_{i.j}\frac{1}{\omega - \varepsilon - \gamma^2 \sum_k \frac{1}{2\omega_k}\frac{1}{\omega - \omega_k + i0}}. \tag{8}$$

Действительная часть интеграла по k в знаменателе определяет лэмбовский сдвиг атомных уровней. Мы будем считать, что соответствующая перенормировка уже произведена и ε – это расстояние между уровнями с учетом лэмбовского сдвига. Тогда остается только мнимая часть интеграла и окончательно

$$\bar{G}_{i,j}(\omega) = \delta_{i,j}\frac{1}{\omega - \varepsilon + i\Gamma(\omega)/2}, \qquad \Gamma(\omega) = \pi\gamma^2 \sum_k \frac{1}{ck}\delta(\omega - ck). \tag{9}$$

Таким образом, мы учли конечное время жизни возбужденного атома, связанное со спонтанным излучением фотона. Вблизи резонанса можно считать Γ не зависящей от частоты и равной $\Gamma = \gamma^2\epsilon/2\pi c^3$.

Если теперь посмотреть на получившийся диаграммный ряд для фотонной функции Грина, то можно видеть, что он имеет ту же структуру, что и ряд для электронной функции Грина в примесном потенциале (крестовая техника) [4]. Разница лишь в том, что вершинам, описывающим рассеяние на примеси, теперь соответствует зависящий от энергии множитель, пропорциональный $\bar{G}(\omega)$, то есть вместо амплитуды рассеяния будет стоять

$$f(\omega) = \frac{\gamma^2}{\omega - \varepsilon + i\Gamma/2}.$$

Это выражение соответствует резонансному рассеянию, когда амплитуда рассеяния вычисляется не в борновском приближении, а с учетом многократного рассеяния на одном атоме. Рассуждая стандартным образом, нетрудно получить выражение для усредненной по беспорядку фотонной функции Грина в пределе малой плотности атомов n (когда длина волны света много меньше расстояния между атомами)

$$\bar{D}(\omega, k) = \frac{1}{2ck} \frac{1}{\omega - ck - \frac{1}{2ck}\frac{n\gamma^2}{\omega - \varepsilon + i\Gamma/2}}.$$

Среда модифицирует закон дисперсии фотона и приводит к затуханию из-за рассеяния на резонансных атомах. В дальнейшем мы не будем учитывать изменение скорости света за счет отличного от единицы показателя преломления и будем считать, что

$$\bar{D}(\omega, k) \simeq \frac{1}{2ck} \frac{1}{\omega - ck + \frac{i}{2\tau(\omega)}}, \tag{10}$$

где частота "соударений" фотона равна

$$\frac{1}{\tau(\omega)} \simeq \frac{1}{2ck} \frac{n\gamma^2\Gamma}{(\omega-\varepsilon)^2 + \Gamma^2/4}. \tag{11}$$

Приближение крестовой техники оправдано при $\frac{1}{\tau(\omega)} \ll \omega$. В таком виде функция Грина фотона практически не отличается (с точностью до очевидного изменения закона дисперсии) от усредненной электронной функции Грина в неупорядоченном металле. Если мы будем теперь интересоваться вероятностью распространения фотона с энергией $\hbar\omega$ в среде, то нужно будет вычислять средние от произведения функций Грина

$$K_{\omega,\Omega}(r_i - r_j) = \overline{D_{i,j}(\omega + \Omega/2) D^*_{i,j}(\omega - \Omega/2)},$$

положив в конечных выражениях $\Omega = 0$. В пределе малой плотности основной вклад в такое среднее вносят лестничные диаграммы [5], как это было и в случае электронов. Окончательный результат в длинноволновом пределе выглядит следующим образом

$$K_{\omega,\Omega}(k) \sim \frac{1}{-i\Omega + \mathcal{D}_0 k^2}, \quad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{3}c^2\tau(\omega),$$

то есть имеет вид диффузионного пропагатора с коэффициентом диффузии $\mathcal{D}$, который стандартным образом связан со скоростью света и временем свободного пробега

$\tau(\omega)$. Далее можно вычислить поправки к коэффициенту диффузии, связанные со слабой локализацией [6]. Результат имеет тот же вид, что и в случае диффузии электронов:

$$\frac{\mathcal{D}(\omega)}{\mathcal{D}_0} = 1 - \frac{1}{\pi N(\omega)} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\mathcal{D}_0 \mathbf{k}^2}, \tag{12}$$

где

$$N(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - ck).$$

Квантовые поправки могут привести к обращению коэффициента диффузии в ноль, то есть к локализации света. Легче всего это может произойти в точке резонанса $\omega = \epsilon$, где коэффициент диффузии минимален. Это означает, что при достаточно большой плотности атомов $n > n_c$, когда длина свободного пробега $c\tau(\epsilon)$ сравнивается с длиной волны резонансного фотона, то есть при

$$n > n_c \sim \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \tag{13}$$

фотон будет локализован. При удалении от резонансной частоты можно ожидать появления порогов подвижности (по крайней мере именно к этому результату приводит в данном случае самосогласованная теория локализации, в которой мы заменяем $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$ в правой части (12)). Область локализованных состояний будет расширяться при увеличении плотности атомов.

Локализация фотона означает, в частности, что первоначально возбужденный атом в дальнейшем так и останется возбужденным, то есть спонтанное излучение в такой системе будет подавлено. Этот эффект имеет другое происхождение, отличное от пленения излучения за счет появления поляритонного расщепления в системе атомов с высокой плотностью [7]. Вопрос о том, как эти два эффекта переходят один в другой при изменении концентрации атомов, остается пока нерешенным. Впрочем, даже в диффузионном режиме вероятность спонтанного излучения заметно меньше, чем для свободного атома – вероятность обнаружить атом в возбужденном состоянии в момент времени t в этом случае ведет себя как $t^{-3/2}$.

Бо̀льший интерес вызывает учет нелинейных эффектов при выходе за рамки однофотонной задачи. Оценим роль этих эффектов в простейшем приближении среднего поля. Будем считать, что если доля первоначально возбужденных атомов равна x, то средняя интенсивность поля в системе дается выражением

$$\langle | E^2 | \rangle \sim \omega x n. \tag{14}$$

Пользуясь известными формулами для описания нелинейного взаимодействия двухуровневых систем с полем [8], мы получим следующую модификацию выражения (11):

$$\frac{1}{\tau(\omega)} \simeq \frac{1}{2ck} \frac{n\gamma^2\Gamma}{(\omega-\varepsilon)^2 + \Gamma^2/4\left(1+\frac{\omega}{\Gamma}\frac{xn}{k^3}\right)}. \tag{15}$$

Мы видим, что в условиях резонанса увеличение средней интенсивности поля (числа фотонов в моде) может приводить к значительному уменьшению локализационных эффектов. Пороговое значение плотности атомов (13) отодвигается в сторону больших концентраций:

$$n_c \sim \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{\omega}{\Gamma}x}. \tag{16}$$

Ясно, что при доле возбужденных $x \gtrsim \Gamma/\omega$ приведенные простые оценки не работают и требуется построение более точной теории, учитывающей корреляционные эффекты при излучении и поглощении фотонов атомами.

Если в системе присутствует много фотонов, то состояния атомов, на которых рассеивается данный фотон, будут зависеть от времени, так как какие-то атомы будут поглощать фотоны и переходить в возбужденное состояние, а какие-то наоборот будут фотоны испускать. И если однофотонная задача допускает проведение аналогии с локализацией электронов, то учет нелинейности во взаимодействии двухуровневых атомов с полем является специфическим эффетом, способным существенно изменить одночастичное описание диффузии и локализации света в таких системах. Тогда, как и в случае электронов, движущихся во флуктуирующем потенциале, в системе появится конечное время сбоя фазы и локализационные поправки не смогут изменить диффузионного поведения фотонного пропагатора.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 99–02–16449.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. УФН, **131**, 653 (1980).

[2] Scattering and Localization of Waves in Random Media. Ed. Ping Seng (World Scientific, Singapore, 1990).

[3] Wiersma D. S. et al. Nature, **390**, 671 (1997).

[4] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.

[5] Горьков Л. П., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е. Письма в ЖЭТФ, **30**, 248 (1979)

[6] Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmelnitskii D. E., and Larkin A. I. Coherent Effects in Disordered Conductors. In "Quantum Theory of Solids", ed. I.M. Lifshits, Mir, Moscow, 1982.

[7] Маслова Н. С., Лернер П. Б. Препринт ФИАН N 77, М., 1987.

[8] Климонтович Ю. В. Кинетическая теория электромагнитных процессов. М., Наука, 1980.

Поступила в редакцию 13 января 2000 г.