УДК 530.145+535.33

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathrm{su_{pd}}(2)$ В РЕШЕНИИ МОДЕЛЕЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ: "ГЛАДКИЕ" su(2)-АППРОКСИМАЦИИ

В. П. Карасев

Даны базирующиеся на формализме полиномиальных алгебр Ли $su_{pd}(2)$ общая операторная схема и "гладкие" $su(2)$-аппроксимации для вычисления энергетических спектров моделей преобразования частоты.

В серии недавних работ [1 – 4] нами был разработан новый эффективный подход к решению физических задач для нелинейных (с неквадратичными гамильтонианами) моделей квантовой оптики и многочастичной физики, основанный на применении формализма полиномиальных алгебр Ли как алгебр динамической симметрии g^{DS} рассматриваемых моделей. В частности, для алгебр $g^{DS} = sl_{pd}(2)$, задаваемых генераторами $V_0,\ V_\pm$ и структурной полиномиальной функцией $\psi(x)$,

$$[V_0, V_\pm] = \pm V_\pm,\ [V_-, V_+] = \psi(V_0 + 1) - \psi(V_0), \tag{1}$$

этот подход приводит к решению трехчленных (якобиевых) рекуррентных соотношений для определения амплитуд $Q_v(E) =< [l_i]; v|E >$ разложения собственных состояний $|E >$ с заданной энергией E по стандартным базисам $\{[l_i]; v >\}$ неприводимых представлений (НП) $D^{[l_i]}$ алгебр $sl_{pd}(2)$. При этом спектры $\{E_a\}$ собственных энергий E_a связанных состояний задаются корнями некоторых спектральных функций (полиномов в случае компактной версии $sl_{pd}(2) = su_{pd}(2)$), определяемых по известным структурным функциям $\psi(x)$ с помощью решения аналогичных рекуррентных соотношений [1 – 3]. В работе [4] для указанных амплитуд и энергий были получены интегральные представления с помощью своеобразного "одевания" решений подходящих вспомогательных задач с динамической алгеброй $sl(2)$. Однако все эти результаты не дают простых рабочих формул, удобных для анализа рассматриваемых моделей и выявления физических эффектов (типа затухания и восстановления осцилляций Раби [3]) в них. Решения [4], кроме того, демонстрируют так называемые "квантовые разрывы" (quantum discontinuities): исчезновение волновых функций при стремлении к пределу $sl(2)$-гамильтонианов [5], что препятствует простому переходу от полностью квантовых моделей к их полуклассическим аналогам.

Ниже предлагается альтернативный метод, использующий операторный формализм алгебр $sl_{pd}(2)$ и их взаимосвязи с обычными алгебрами $sl(2)$, что позволяет выделить в решении "гладкую" аппроксимацию, связанную с обобщенными когерентными состояниями (ОКС) орбитного типа [6] алгебры $sl(2)$. Общий формализм иллюстрируется на примерах широко распространенных в квантовой оптике моделей преобразования частоты [7] с гамильтонианами

$$H_1 = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + g(a_1^+)^2 a_2 + g^*(a_1)^2 a_2^+ \tag{2a}$$

и

$$H_2 = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \omega_3 a_3^+ a_3 + g(a_1^+ a_2^+) a_3 + g^*(a_1 a_2) a_3^+. \tag{2б}$$

Как известно [3, 4], гамильтонианы (2) можно представить в форме

$$H = aV_0 + gV_+ + g^* V_- + C,\ [V_\alpha, C] = 0,\ V_- = (V_+)^+, \tag{3}$$

где $3V_0 = (N_1 - N_2),\ V_+ = (a_1^+)^2 a_2,\ a = 2\omega_1 - \omega_2,\ C = R_1(\omega_1 + \omega_2),\ 3R_1 = N_1 + 2N_2$ и $V_0 = (N_1 + N_2 - N_3)/3,\ V_+ = (a_1^+ a_2^+) a_3,\ a = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3,\ 2C = R_1(\omega_1 - \omega_2) + R_2(\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_3),\ R_1 = N_1 - N_2,\ 3R_2 = N_1 + N_2 + 2N_3$ для (2а) и для (2б) соответственно; $N_i = a_i^+ a_i$ [4]. Величины R_i – интегралы движения, а V_α – генераторы полиномиальных алгебр Ли $su_{pd}(2)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (1) со структурными функциями

$$\psi(V_0) = (2V_0 + R_1)(2V_0 + R_1 - 1)(-V_0 + R_1 + 1), \tag{4a}$$

$$\psi(V_0) = \frac{1}{4}(2V_0 + R_2 - R_1)(2V_0 + R_1 + R_2)(-V_0 + R_2 + 1) \tag{4б}$$

для гамильтонианов (2а) и (2б) соответственно (для простоты здесь и ниже опускается символ I единичного оператора при числовых коэффициентах в выражениях типа (4)). Фоковские пространства моделей L_F (с базисами $\{\prod_i (a_i^+)^{n_i} |0>\}$) разбиваются в прямые суммы

$$L_F = \sum_{\oplus} L([l_i]),\ (V_+ V_- - \psi(V_0))|_{L([l_i])} = 0 \tag{5}$$

подпространств $L([l_i])$, на которых алгебры $su_{pd}(2)$ действуют неприводимо. Инвариантные подпространства $L([l_i])$ НП $D^{[l_i]}$ порождаются базисными векторами

$$|[l_i]; v >= [(\psi(l_0+v))^{(v)}]^{-1/2} V_+^v |[l_i] >, \ (\psi(x))^{(v)} \equiv \prod_{r=0}^{v-1} \psi(x-r),$$

$$V_0|[l_i]; v >= (l_0+v)|[l_i]; v >, \ R_i|[l_i]; v >= l_i|[l_i]; v >, \ \psi(R_0) \equiv \psi(V_0) - V_+V_-, \ V_-|[l_i] >= 0, \tag{6}$$

где "младшие" векторы $|[l_i] > \equiv |[l_i]; v = 0 >$ задаются (с учетом (4) – (5)) соотношениями

$$|[l_i] >= |l_0 = \frac{k-s}{3}, \ l_1 = \frac{k+2s}{3}] >= \frac{(a_1^+)^k (a_2^+)^s}{[k!s!]^{1/2}}|0 >, \ k = 0, 1; \ s = 0, 1, 2, ... \tag{7а}$$

для моделей (2а) и

$$|[l_i] >= |l_0 = \frac{|k|-s}{3}, \ l_1 = k, \ l_2 = \frac{|k|+2s}{3} >= [|k|!s!]^{-1/2} (a_1^+)^{\frac{|k|+k}{2}} (a_2^+)^{\frac{|k|-k}{2}} (a_3^+)^s |0 >,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \ s = 0, 1, 2, ... \tag{7б}$$

для моделей (2б).

Как известно [6], в случае, когда V_α в (3) – генераторы обычной алгебры $su(2)$ с квадратичной структурной функцией $\psi(x) = (j+x)(j+1-x)$, $l_0 = -j$, гамильтонианы (3) легко диагонализуются с помощью техники ОКС $su(2)$:

$$H \rightarrow \tilde{H}(\xi) = S_V(\xi) H S_V(\xi)^\dagger = C + V_0 A_0(a, g; \xi) + V_+ A_+(a, g; \xi) + V_- A_+^*(a, g; \xi),$$
$$S_V(\xi) = \exp(\xi V_+ - \xi^* V_-), \ A_0(a, g; \xi) = a\cos 2|\xi| + \left(g\frac{\xi^*}{|\xi|} + g^*\frac{\xi}{|\xi|}\right)\sin 2|\xi|,$$
$$A_+(a, g; \xi) = -a\frac{\xi}{2|\xi|}\sin 2|\xi| + g\cos^2|\xi| - g^*\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)^2 \sin^2|\xi|], \tag{8а}$$
$$\tilde{H}(\xi_0) = S(\xi_0) H S(\xi_0)^\dagger = C + V_0\sqrt{a^2 + 4|g|^2}, \ \xi_0 = \frac{g}{2|g|}\text{arctg}\frac{2|g|}{a}, \tag{8б}$$

где диагонализующее гамильтониан $\tilde{H}(\xi)$ значение ξ_0 определяется из условия $A_+(a, g; \xi_0) = 0$. Эквивалентный способ [8], поставляющий те же собственные векторы $|[l_i]; v; \xi_0 >$ и собственные энергии $E([l_i]; v; \xi_0)$, базируется на использовании условий

$$\frac{\partial E([l_i]; v; \xi)}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial E([l_i]; v; \xi)}{\partial r} = 0, \ \xi = re^{i\theta} \tag{9}$$

стационарности функционала энергии $E([l_i]; v; \xi) =< [l_i]; v; \xi | H | [l_i]; v; \xi >$, определяемого с помощью ОКС группы $SU(2)$

$$|[l_i]; v; \xi >= S_V(\xi)^\dagger |[l_i]; v; >= \exp(-\xi V_+ + \xi^* V_-) |[l_i]; v >= (\cos^2 r)^{j-v} \times$$

$$\times \sum_{f \geq 0} \frac{(-e^{i\theta} tgr)^{f-v}}{(f-v)!} F(-v, -v+2j+1; f-v+1; \sin^2 r) \left[\frac{(2j-v)! f!}{(2j-f)! v!}\right]^{1/2} |[l_i]; f > \tag{10}$$

где $F(...)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. При этом существенно используются конечномерность присоединенного (векторного) НП группы $SU(2)$ (см. (8a)), а также известные разложения (10) ОКС $SU(2)$ по состояниям (6).

Однако в общем случае присоединенное представление полиномиальных алгебр Ли $su_{pd}(2)$ (определяемое последовательным коммутированием их произвольных элементов) бесконечномерно, а экспоненциальные операторы типа $S_V(\xi) = \exp(\xi V_+ - \xi^* V_-)$ (аналоги групповых операторов для $SU(2)$) не имеют удобных для вычислений явных выражений (типа (10)) для матричных элементов в базисах (6), поскольку такие экспоненциалы соответствуют не группам Ли, а только квазигруппам [9], для которых в настоящее время не существует развитого формализма типа техники ОКС для обычных групп Ли. Тем не менее, принимая во внимание изоморфизм алгебр $su_{pd}(2)$ специальным подалгебрам расширений обертывающей алгебры $u(su(2))$ обычной алгебры $su(2)$, устанавливаемый с помощью обобщений отображений Холстейна–Примакова [3]

$$Y_0 = V_0 - l_0 - j, \ j = \frac{s}{2}, \ Y_+ = V_+ \sqrt{\frac{(j - Y_0)(j + 1 + Y_0)}{\psi(V_0 + 1)}}, \ Y_- = (Y_+)^+, \tag{11}$$

где Y_α – генераторы обычной алгебры $su(2)$, можно и в этом случае применить диагонализующую схему (8). Действительно, используя представление диагонализующих операторов $S(\xi)$ в форме разложений в степенные ряды

$$S(\xi) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} V_+^f S_f(V_0; \xi), \ V_+^{-n} \equiv V_-^n ([\psi(V_0)]^{(n)})^{-1}, \ n > 0 \tag{12}$$

с не заданными явно (в отличие от случая алгебры $su(2)$) коэффициентами $S_f(V_0;\xi)$, получим нелинейные аналоги соотношений (8)

$$\tilde{H}(\xi) = S_V(\xi)HS_V(\xi)^\dagger = C + \sum_{f=-\infty}^{\infty} V_+^f \tilde{h}_f(V_0;\xi),\ V_+^{-n} \equiv V_-^n([\psi(V_0)]^{(n)})^{-1},\ n>0,$$

$$\tilde{h}_f(V_0;\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\psi(V_0)]^{(n-f)} S_n(V_0+f-n;\xi)[a(V_0+f-n)S^*_{n-f}(V_0+f-n;\xi)+$$

$$+g\psi(V_0+f-n)S^*_{n+1-f}(V_0+f-n-1;\xi)+g^*S^*_{n-1-f}(V_0+f-n+1;\xi)],$$

$$\tilde{h}_{-f}(V_0;\xi) = \tilde{h}^*_f(V_0-f;\xi)[\psi(V_0)]^{(f)},\ [\psi(V_0)]^{(-f)} \equiv ([\psi(V_0+f)]^{(f)})^{-1},\ f>0, \quad (13a)$$

$$\tilde{H}(\xi_0) = S(\xi_0)HS(\xi_0)^\dagger = C + \tilde{h}_0(V_0;\xi_0),\ E([l_i];v;\xi) = C + < [l_i];v|\tilde{h}_0(V_0;\xi)|[l_i];v> \quad (13б)$$

в терминах коэффициентов $S_f(V_0;\xi)$. (Отметим, что при известных $S_f(V_0;\xi)$ форма (12) обеспечивает нахождение собственных векторов задачи в явном виде (типа (10)) и проведение вычислений любых физических величин, исходя только из алгебраических соотношений (1), (4) – (7).)

Как видно из формул (13), диагональная форма $\tilde{H}(\xi_0)$ гамильтонианов (3) имеет (в отличие от (8б)) существенно нелинейную зависимость от V_0, определяемую коэффициентами $S_f(V_0;\xi_0)$. Эти коэффициенты в свою очередь удовлетворяют следующим из условия унитарности $SS^\dagger = S^\dagger S = I$ квадратичным соотношениям

$$\sum_{f=-\infty}^{\infty} [\psi(V_0)]^{(f)} S_{k+f}(V_0-f;\xi)S^*_f(V_0-f;\xi) = \delta_{k,0} \quad (14a)$$

и вытекающим из условия $S(\xi_0)H = \tilde{H}(\xi_0)S(\xi_0)$ или условий $\tilde{h}_f(V_0;\xi_0) = 0$, $f = \pm1, \pm2, ...$ (ср. (13)) операторным рекуррентным соотношениям

$$S_f(V_0;\xi_0)[aV_0 - \tilde{h}_0(V_0+f;\xi_0)] + gS_{f-1}(V_0+1;\xi_0) + g^*S_{f+1}(V_0-1;\xi_0) = 0,\ f = 0, \pm1, \pm2, ...,$$

$$\tilde{h}_0(V_0;\xi_0) = aV_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\psi(V_0)]^{(n)} S_n(V_0-n;\xi_0)[-nS^*_n(V_0-n;\xi_0)+$$

$$+g\psi(V_0-n)S^*_{n+1}(V_0-n-1;\xi_0) + g^*S^*_{n-1}(V_0-n+1;\xi_0)] \quad (14б)$$

или

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\psi(V_0)]^{(n-f)} S_n(V_0+f-n;\xi_0)[a(V_0+f-n)S^*_{n-f}(V_0+f-n;\xi_0)+$$

$$+g\psi(V_0+f-n)S^*_{n+1-f}(V_0+f-n-1;\xi_0)+g^*S^*_{n-1-f}(V_0+f-n+1;\xi_0)],\ f = \pm1, \pm2, .. \quad (14в)$$

Если диагонализирующие операторы $S(\xi_0)$ ищутся в форме $S_V(\xi_0) = \exp(\xi_0 V_+ - \xi_0^* V_-)$, $\xi_0 = r\exp(i\theta)$, то коэффициенты $S_f(V_0;\xi_0) = \exp(if\theta)\sigma_f(V_0;r)$ удовлетворяют дополнительно соотношениям

$$\frac{\partial \sigma_f(V_0;r)}{\partial r} = \sigma_{f-1}(V_0;r) - \psi(V_0+f)\sigma_{f+1}(V_0;r) \qquad (15)$$

с начальными условиями $\sigma_f(V_0; r=0) = \delta_{f,0}$.

Таким образом, формализм алгебр $su_{pd}(2)$ позволяет получить общую схему (12) – (13) диагонализации гамильтонианов (3), обобщающую (8), (10) и сводящуюся к решению операторных алгебраических уравнений (14) – (15). Однако в силу существенно нелинейного характера этих соотношений и зависимости коэффициентов от переменных величин получить замкнутые выражения для их решений в общем виде пока не удалось; остается также открытым вопрос о совместности соотношений (14) и (15), обеспечивающей существование единой экспоненциальной формы оператора $S(\xi_0)$ на всем L_F. Для рассматриваемого класса моделей возможно упрощение задачи, если ограничиться рассмотрением соотношений (12) – (15) на каждом неприводимом относительно $su_{pd}(2)$ подпространстве $L([l_i])$ **отдельно**. Тогда в силу следующего из (4), (6), (7) соотношения $(V_\pm)^{s+1}|_{L([l_i])} = 0$ пространства $L([l_i])$ конечномерны ($s+1$-мерны); поэтому все ряды (13) конечны и диагонализующие гамильтонианы (2) значения ξ_0 в операторах $S(\xi)$ определяются на каждом $L([l_i])$ отдельно. В частности, собственные волновые функции $|[l_i]; v; \xi_0 >$ задаются полиномами от V_+, а функционал энергии $E([l_i]; v; \xi)$ представляется в виде суммы $s+1$ спектральных функций, т.е. в форме, предписываемой для такого типа моделей алгебраическим анзацем Бете [10]. (В принципе, используя представления полиномов $p(x)$ в виде произведений $p(x) = A\prod_j (x - x_j)$ (x_j – корни $p(x)$), можно получить новую формулировку анзаца Бете для моделей типа (2) в терминах алгебр $su_{pd}(2)$, которая проще и эффективней исходной версии [10], как показано в [3].)

Однако указанные упрощения позволяют получить удобные для анализа замкнутые выражения лишь для малых размерностей $d([l_i]) = s+1$ пространств $L([l_i])$. В то же время векторы физически реализуемых состояний (когерентных, сжатых и т.д.) имеют ненулевые проекции на все подпространства $L([l_i])$. Поэтому для физических приложений желательно иметь пусть приближенные, но простые формулы типа (8б), (10) для спектра энергий и собственных волновых функций. В работах [2 – 3] такие формулы были получены для квазиэквидистантного (эквидистантного в пределах фиксированного $L([l_i])$) приближения с помощью отображений (11) гамильтонианов (3) в гамильтонианы $H_{su(2)}$, которые линейны по генераторам Y_α обычной алгебры $su(2)$. Однако такое квазиэквидистантное приближение, задаваемое формулами (8), (10) с заменой $V_\alpha \to Y_\alpha$, не позволяет выявить ряд существенных физических особенностей моделей (например, затухание и восстановление осцилляций Раби).

В тоже время, применяя "гладкие" ОКС группы $SU(2)$

$$|[l_i]; v; \xi >= S_Y(\xi)^\dagger |[l_i]; v >= \exp(-\xi Y_+ + \xi^* Y_-)|[l_i]; v >, \qquad (16)$$

получаемые из (10) заменой $V_\alpha \to Y_\alpha$, как пробные функции в вариационной схеме (9), найдем приближение, которое не эквидистантно для больших размерностей $d([l_i])$ уже в пределах заданного $L([l_i])$ и может быть названо "гладкой" $su(2)$-аппроксимацией (в силу гладкости собственных векторов, следующих из (16)). Действительно, используя соотношения (11) в (3) и ОКС $SU(2)$ (16) в определении $E([l_i]; v; \xi)$, после элементарных преобразований получим следующее выражение

$$E([l_i]; v; \xi_0) = C + a(l_0 + j) + a(-j + v)\cos 2r - 2|g| \sum_{f \geq 0} E_v^\psi(l_0, j; f),$$

$$E_v^\psi(l_0, j; f) = (\cos^2 r)^{2(j-v)} \frac{(tgr)^{2(f-v)+1}(2j - v)!(f + 1)!}{v!(f - v)!(f + 1 - v)!(2j - f - 1)!} \sqrt{\frac{\psi(l_0 + 1 + f)}{(2j - f)(f + 1)}} \times$$

$$\times F(-v, -v + 2j + 1; f - v + 1; \sin^2 r) F(-v, -v + 2j + 1; f - v + 2; \sin^2 r) \qquad (17)$$

для функционала энергии $E([l_i]; v; \xi_0 = re^{i\theta})$, где учтено, что $e^{i\theta} = g/|g|$ вследствие первого условия (9). С помощью второго условия (9) находим уравнение

$$0 = \sum_{f \geq 0} \frac{\alpha^{2f}}{(2j - 1 - f)!f!} \left\{ \frac{a\alpha}{|g|} - [4\alpha^2 j - (1 + \alpha^2)(2f + 1)] \sqrt{\frac{\psi(l_0 + 1 + f)}{(2j - f)(f + 1)}} \right\}, \ \alpha = -tgr \qquad (18)$$

для значения параметра r, обеспечивающего приближенную диагонализацию гамильтониана (3). Из (17) видно, что спектральные функции $E_v^\psi(l_0, j; f)$ нелинейны по индексу v, нумерующему уровни энергии, что и обеспечивает неэквидистантность спектра при $d([l_i]) > 3$; кроме того, в силу наличия иррациональностей в определении этих функций, собственные частоты $\omega_v \equiv E_v/\hbar$ задачи при этом несоразмерны: $m\omega_{v_1} \neq n\omega_{v_2}$, что является индикатором возникновения таких эффектов как затухание и восстановление осцилляций Раби [11]. Отметим, что при замене подкоренных выражений в формулах (18), (17) единицей (соответствующей переходу от алгебр $su_{pd}(2)$ к обычным алгебрам

Ли $su(2)$) получим формулы (8б); кроме того, для малых размерностей формулы (18), (17) дают значения, совпадающие с точными.

В целом полученные результаты, позволяющие находить аналитические выражения для любых динамических величин, показывают перспективность применения метода полиномиальных алгебр Ли для решения физических задач в моделях, которые можно выразить в терминах генераторов этих алгебр. Дальнейшее совершенствование разработанной методики может идти по линии как получения точных решений соотношений (14) – (15), так и упрощения формул (17) (или получения с помощью (16) уравнений типа Хартри–Фока с зависимостью от времени по аналогии с [8]) с целью выявления новых коллективных эффектов в моделях типа (2).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карасев В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 31 (1991); N 7-8, 9 (1992); N 3-4, 51 (1993).

[2] Карасев В. П. ТМФ, **95**, 3 (1993).

[3] Karassiov V. P. J. Phys., **A27**, 153 (1994).

[4] Karassiov V. P. and Klimov A. B. Phys. Lett., **A189**, 43 (1994).

[5] Calogero F. Lett. Nuovo Cimento, **25**, 533 (1979); Chhujlany S. C. J. Phys., **A25**, 317 (1992).

[6] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[7] Перина Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М., Мир, 1987.

[8] Jezek D. M. and Hernandez E. S. Phys. Rev., **A42**, 96 (1990).

[9] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М., Наука, 1991.

[10] Годен М. Волновая функция Бете. М., Мир, 1987.

[11] Narozhny N. B., Sanchez-Mondragon J. J., and Eberly J. H. Phys. Rev., **A23**, 236 (1981).

Поступила в редакцию 2 ноября 1995 г.