УДК 530.145

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОПАГАТОРА ЧАСТИЦЫ ДИРАКА В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ПО ТРАЕКТОРИЯМ

А. И. Нуньес

Предложено построение континуального представления пропагатора спинорной частицы во внешнем электромагнитном поле, включающего интегрирование по спиновым переменным, на основе соответствующих уравнений движения, не прибегая к конечно-кратным аппроксимациям и к квадрированию оператора Дирака.

Представление в виде интеграла по траекториям для пропагатора спинорной частицы впервые получено в работах [1, 2], где подробно разобран подход разбиения временного интервала, и в [3, 4], исходя из квадрированного уравнения Дирака. В [5] были введены антикоммутирующие переменные для описания спиновых степеней свободы. Локально-суперсимметричное репараметризационно-инвариантное действие спинорной частицы (действие одномерной супергравитации) найдено в работах [6, 7]. В работе [8] получено континуальное представление, которое отличается наличием названных симметрий. В статье [9] гамильтонова форма интеграла по траекториям интерпретируется в свете BFV-квантования одночастичной теории.

Пропагатор $S^c_{ik}(x_{out}, x_{in}; A)$ спинорной частицы во внешнем электромагнитном поле $A_\mu(x)$ есть причинная функция Грина уравнения Дирака:

$$([i\partial_\mu - A_\mu]\gamma_\mu - m)S^c(x_{out}, x_{in}; A) = -\delta^{(4)}(x_{out} - x_{in}),$$

$\mu = 0,1,2,3 i, k = 1,2,3,4 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$. Будем искать функцию $\tilde{S}^c_{ik}(x_{out}, x_{in}) = S^c_{ij}(x_{out}, x_{in})\gamma^5_{jk}$, удовлетворяющую уравнению

$$(\nabla_\mu\gamma^\mu - \gamma^5 m)\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = \delta^{(4)}(x_{out} - x_{in}), \tag{1}$$

$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn}$, $m, n = 0,1,2,3,5$, $\eta^{mn} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$. Соответственно этому найдем оператор $\hat{S}$, обратный к оператору $\hat{\nabla}_\mu\hat{\gamma}^\mu - m\hat{\gamma}^5 = [\hat{p}_\mu - A_\mu(\hat{x})]\hat{\gamma}^\mu - m\gamma^5$.

Этот оператор действует в пространстве $\mathbf{H} = L_2(\mathbf{R}_1^4) \otimes \mathbf{C}^4$ представления алгебры $[\hat{p}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$, $\{\hat{\gamma}^m, \hat{\gamma}^n\} = 2\eta^{mn}$. В $\mathbf{C}^4$ реализуется обычное (матричное) представление алгебры Клиффорда. При этом функция Грина $\tilde{S}^c_{ik}(x_{out}, x_{in}; A)$ является матричным элементом оператора $\hat{S}$ в базисе $\{| x > \otimes | q >; x \in \mathbf{R}_1^4, q = 1, 2, 3, 4, \}$: $\tilde{S}^c_{ik}(x_{out}, x_{in}; A) = < x_{out}, i \mid \hat{S} \mid x_{in}, k >$. Для оператора $\hat{S}$ из (1) имеем $(\nabla_\mu \hat{\gamma}^\mu - m\hat{\gamma}^5)\hat{S} = 1$. Для его нахождения воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \int_0^\infty d\lambda \int \exp\{i[\lambda(A^2 + i\epsilon) + \chi A]\} d\chi,$$

где χ – элемент некоторой алгебры Грассмана, $\{\chi, A\} = 0$, а λ – четный параметр (c-число),

$$\hat{S} = \int_0^\infty d\lambda \int e^{-iH} d\chi,$$

$$H(\hat{x}, \hat{p}, \hat{\gamma}, \lambda, \chi) = \lambda(m^2 - (\hat{\nabla}_\mu \hat{\gamma}^\mu)^2) - \chi(\hat{\nabla}_\mu \hat{\gamma}^\mu - \hat{\gamma}^5 m) =$$
$$= \lambda\{m^2 - \hat{\nabla}^2 + \tfrac{i}{2} F_{\mu\nu}(\hat{x})\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu\} + (\hat{\nabla}_\mu \hat{\gamma}^\mu - \hat{\gamma}^5 m)\chi,$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, и поэтому пропагатор

$$\tilde{S}^c_{ik}(x_{out}, x_{in}; A) = \int_0^\infty d\lambda \int < x_{out}, i \mid e^{-iH} \mid x_{in}, k > d\chi.$$

Введем функцию

$$g_J(x_{out}, x_{in}, i, k, \lambda, \chi; A) = < x_{out}, i \mid T \exp\{-i \int_0^1 (H + j(\tau)\hat{x} +$$
$$+ g(\tau)\hat{p} + \rho(\tau)\hat{\gamma}) d\tau\} \mid x_{in}, k >,$$

где $j_\mu(\tau)$ и $g^\mu(\tau)$ – четные источники к операторам $\hat{x}$, $\hat{p}$, а $\rho_n(\tau)$ – нечетные источники к $\hat{\gamma}^n$, $\{\rho^m(\tau), \rho^n(\tau)\} = 0$, $\{\gamma^m, \rho^n(\tau)\} = 0$, являющиеся функциями собственного времени τ, принимающими значения на некоторой алгебре Грассмана. Функцию g_J можно записать в виде

$$g_J = \exp\left\{-i \int_0^1 H\left(i\frac{\delta}{\delta j(\tau)}, i\frac{\delta}{\delta g(\tau)}, i\frac{\delta_L}{\delta \rho(\tau)}\right) d\tau\right\} \times$$
$$\times < x_{out}, i \mid T \exp\{-i \int_0^1 (j(\tau)\hat{x} + g(\tau)\hat{p} + \rho(\tau)\hat{\gamma}) d\tau\} \mid x_{in}, k > . \qquad (2)$$

Матричный элемент

$$< i \mid T\exp\{-i \int\limits_0^1 \rho(\tau)\hat{\gamma}d\tau\} \mid k > \tag{3}$$

может быть записан в виде интеграла по грассмановым функциям. Для операторов $\hat{\gamma}_n$ введем представление $\hat{\gamma}_n = \beta_n + \partial_L/\partial\beta^n$, где β_n – нечетные переменные. Определим следующие операторы: $\hat{a}(\tau) = \rho(\tau)\beta$, $\hat{b}(\tau) = \rho(\tau)\partial_L/\partial\beta$. Нормальной назовем форму, в которой все операторы $\hat{b}(\tau)$ стоят слева от $\hat{a}(\tau)$. Используя теорему Вика, получаем:

$$T\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\hat{\gamma}d\tau\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \rho(\tau)\epsilon(\tau - \tau')\rho(\tau')d\tau d\tau'\right\}\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\hat{\gamma}d\tau\right\},$$

$\epsilon(\tau)$ – знаковая функция. Подставим это выражение в искомый матричный элемент (3),

$$< i \mid T\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\hat{\gamma}d\tau\right\} \mid k > = \left[\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\gamma d\tau\right\}\right]_{ik} J[\rho].$$

$$J[\rho] = \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \rho(\tau)\epsilon(\tau - \tau')\rho(\tau')d\tau d\tau'\right\}$$

– функционал от источников $\rho(\tau)$, который нетрудно представить в виде континуального интеграла по грассмановым переменным

$$J[\rho(\tau)] = C'\int \exp\left\{-i\int\limits_0^1 \left(-\frac{i}{4}\varphi(\tau)\dot{\varphi}(\tau) + \rho(\tau)\varphi(\tau)\right)d\tau\right\} D_\varphi,$$

где интегрирование ведется по функциям $\{\varphi(\tau) : \varphi(0) + \varphi(1) = 0\}$. Это граничное условие выделяет функции вида

$$\varphi(\tau) = i\int\limits_0^1 \epsilon(\tau - \tau')\rho(\tau')d\tau'$$

из общего решения уравнений движения. Далее, представим экспоненту $\exp\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\gamma d\tau\}$ в виде

$$\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\gamma d\tau\right\} = \exp\left\{\gamma\frac{\partial_L}{\partial\theta}\right\}\exp\left\{-i\int\limits_0^1 \rho(\tau)\theta d\tau\right\}|_{\theta=0},$$

где θ^n, $n = 0,1,2,3,5$ – нечетные переменные, и сделаем в континуальном интеграле линейную замену переменных $\varphi(\tau) \to 2\psi(\tau) - \theta$. Введем Фурье-образ по x_{out} для четной части (2):

$$u_J(p,\, x_{in}) = < p \mid T\exp\left\{-i\int\limits_0^1 (j(\tau)\hat{x} + g(\tau)\hat{p})\, d\tau\right\}|x_{in} >$$

и операторы $\hat{c}(\tau) = j(\tau)\hat{x}$, $\hat{d}(\tau) = g(\tau)\hat{p}$. Определим нормальную форму как форму, в которой все операторы $\hat{d}(\tau)$ стоят левее операторов $\hat{c}(\tau)$ (стандартная форма), и применим теорему Вика; тогда (здесь $\theta(\tau)$ – функция Хевисайда)

$$u_J(p,\, x_{in}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\exp\left\{i(px_{in} - \int\limits_0^1 (pg(\tau) + x_{in}j(\tau))\, d\tau\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{i\int\limits_0^1\int\limits_0^1 j(\tau)\theta(\tau - \tau')g(\tau')d\tau d\tau'\right\}.$$

Вторую экспоненту можно представить в виде континуального интеграла, понимаемого как гауссов при заданных граничных условиях:

$$\exp\left\{i\int\limits_0^1\int\limits_0^1 j(\tau)\theta(\tau - \tau')g(\tau')d\tau d\tau'\right\} =$$
$$= C\int\exp\left\{-i\int\limits_0^1(\pi(\tau)\dot{q}(\tau) + g(\tau)\pi(\tau) + j(\tau)q(\tau))\, d\tau\right\} DqD\pi,$$

с граничными условиями $q(0) = 0$, $\pi(0) = 0$. Подставив полученные ответы для матричных элементов в функцию (2), после интегрирования по импульсам получаем для пропагатора

$$\tilde{S}^c(x_{out},\, x_{in}) = \exp\left\{\gamma\frac{\partial_L}{\partial\theta}\right\}\int\limits_0^\infty dT\int d\chi N(T)\int\exp\left\{-i\int\limits_0^1\left[\frac{\dot{q}^2(\tau)}{2T} +\right.\right.$$
$$+\frac{Tm^2}{2} + \dot{q}(\tau)A - i\psi(\tau)\dot{\psi}(\tau) + iTF_{\mu\nu}\psi^\mu(\tau)\psi^\nu(\tau) -$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\dot{q}(\tau)\psi(\tau)}{T} - \psi^5(\tau)m\right)\chi + i\psi(1)\psi(0)\right]d\tau\right\}DqD\psi|_{\theta=0} \qquad (4)$$

с граничными условиями $q(0) = x_{in}$, $q(1) = x_{out}$, $\psi(0) + \psi(1) = \theta$, $T = 2\lambda$, $N(T) = \int \exp\{\frac{i}{2}\int\limits_0^1 Tp^2 d\tau\} Dp$ – мера. Из ответа (4) видно, что для получения выражения с γ-матрицами достаточно вычислить континуальный интеграл, являющийся функцией θ, и в конце заменить θ на γ-матрицы.

Автор благодарен проф. В. Я. Файнбергу, проф. Б. Л. Воронову и А. В. Маршакову, за интересные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tobocman W., Nuovo Cim., **3**, 1213 (1956).
[2] Рязанов Г. В., ЖЭТФ, **336**, 1439 (1957).
[3] Fradkin E. S., Nucl. Phys., B., **76**, 588 (1966).
[4] Баталин И. А. Фрадкин Е. С., ТМФ, **5**, 190 (1970).
[5] Berezin F. A., Marinov M. S., Ann. Phys., **104**, 336 (1977).
[6] Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P., Phys. Lett., B., **64**, 435 (1976).
[7] Brink L., Di Vecchia P., Howe P., Nucl. Phys., **118**, 76 (1977).
[8] Fainberg V. Ya., Marshakov A. V., Nucl. Phys., B., **306**, 659 (1988).
[9] Gitman D. M., Fradkin E. S., Phys. Rev., **44**, 3230 (1991).

Поступила в редакцию 4 марта 1994 г.