УДК 533.951

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧЕРЕНКОВСКОГО И ПИРСОВСКОГО ГЕНЕРАТОРОВ НА КАБЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЕ

М. Ю. Пекар, А. А. Рухадзе

Рассматривается линейная теория возбуждения кабельной волны в плазменном резонаторе прямолинейным релятивистским электронным пучком. Проведено сравнение черенковского и пирсовского режимов генерации.

После успешного эксперимента [1], в котором был реализован первый плазменный генератор на вынужденном черенковском излучении релятивистского электронного пучка, началась бурно развиваться релятивистская плазменная СВЧ-электроника. Уже на протяжении многих лет в ИОФАНе исследуется черенковский плазменный генератор, возбуждаемый трубчатым пучком [2]. Вместе с тем, как показано в [3], возбуждение такого генератора возможно также и при нерезонансном вынужденном излучении Пирса. В настоящей статье проводится сравнительный анализ двух режимов возбуждения плазменного генератора и выяснены условия их преимущественной реализации.

Рассмотрим следующую модель генератора. Пусть гладкий металлический волновод цилиндрической формы радиуса R и длины L помещен в сильное магнитное поле, направленное вдоль оси волновода. Поле предполагается достаточно сильным, чтобы поперечным движением заряженных частиц можно было пренебречь. В волноводе находится холодная электронная плазма, однородная по длине резонатора.

Невозмущенный пучок моноэнергетических электронов влетает со скоростью u через левую границу $z = 0$ волновода, где находится металлическая сетка или фольга, прозрачная для электронов и непрозрачная для поля излучения, и беспрепятственно покидает волновод через правую границу $z = L$, где находится излучающее устройство.

Поперечная структура поля $\tilde{\psi}(r)$ в резонаторе определяется из мембранного уравнения [4]

$$\Delta_{\perp}\tilde{\psi} - \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}p_p(r) - \frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega - k_{\parallel}u)^2}p_b(r)\right]\tilde{\psi} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $p_p(r)$ и $p_b(r)$ – профили плазмы и пучка соответственно.

Рассмотрим случай, когда бесконечно тонкий трубчатый пучок электронов скользит вдоль поверхности бесконечно тонкой трубчатой плазмы, то есть когда имеет место условие

$$p_b(r) = \Delta_b \delta(r - r_p),\ p_p(r) = \Delta_p \delta(r - r_p). \tag{2}$$

Для кабельной волны, задаваемой поперечной структурой

$$\tilde{\psi}(r) = \begin{cases} I_0(k \perp r), & 0 \le r \le r_p, \\ \frac{I_0(k_\perp r)K_0(k_\perp R) - I_0(k_\perp R)K_0(k \perp r)}{I_0(k_\perp r_p)K_0(k_\perp R) - I_0(k_\perp R)K_0(k_\perp r_p)} I_0(k_\perp r_p), & r_p \le r \le R, \end{cases} \tag{3}$$

из уравнения (1) получаем характеристическое уравнение

$$\left(k_\parallel^2 - a^2\right)\left(k_\parallel - \frac{\omega}{u}\right)^2 = \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{u^2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_\parallel^2\right)\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\frac{\Delta_b}{\Delta_p}, \tag{4}$$

которое определяет закон дисперсии волн $k_v = k_v(\omega)$ в системе. Здесь введены обозначения

$$\kappa_\perp^2 = \frac{1}{r_p \Delta_p I_0^2(k_\perp r_p)\left[\frac{K_0(k_\perp r_p)}{I_0(k_\perp r_p)} - \frac{K_0(k_\perp R)}{I_0(k_\perp R)}\right]} \tag{5}$$

и

$$a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{\kappa_\perp^2 c^2}{\omega_p^2}\right). \tag{6}$$

В отсутствие пучка ($\omega_b = 0$) уравнение (4) определяет закон дисперсии поверхностной плазменной волны [4]

$$\omega^2 = k_\parallel^2 c^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 + \kappa_\perp^2 c^2}. \tag{7}$$

В длинных системах $L >> R$ в пределе $k_\perp R << 1$, параметр $\kappa_\perp^2$ определяется выражением

$$\kappa_\perp^2 = \frac{1}{r_p \Delta_p \ln \frac{R}{r_p}}. \tag{8}$$

Поперечное волновое число $k_\perp$ при этом дается формулой

$$k_\perp = k_\parallel \frac{\kappa_\perp c}{\sqrt{\omega_p^2 + \kappa_\perp^2 c^2}}. \tag{9}$$

Как отмечено выше, в плазменном волноводе возможны два механизма возбуждения кабельной волны: резонансное черенковское излучение, которое определяется условием $\omega = k_\parallel u$, и нерезонансное вынужденное излучение Пирса, которое не требует выполнения этого условия. Поэтому уравнение (4) будет иметь два качественно различных класса решений, которые определяются наличием расстройки от условия черенковского резонанса. Учитывая пучок по теории возмущений, найдем решение уравнения (4) вдали от условия черенковского резонанса. Электромагнитным волнам, прямой и обратной, соответствуют два решения

$$k_{1,2} = \pm a \pm \frac{\beta_{1,2}}{2a}\omega_b^2, \tag{10}$$

здесь

$$\beta_{1,2} = -\frac{k_\perp^2 \gamma^{-3}}{(\omega \mp au)^2}\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\frac{\Delta_b}{\Delta_p}. \tag{11}$$

Еще два решения определяют спектр пучковых колебаний

$$k_{3,4} = \frac{\omega}{u} \pm \alpha\omega_b, \tag{12}$$

где

$$\alpha = i\frac{\omega}{u}\frac{\gamma^{-3/2}}{\sqrt{\Omega_{res}^2}}\sqrt{\frac{\Delta_b}{\Delta_p}}. \tag{13}$$

Здесь введено обозначение расстройки Ω_{res}^2 от условий оптимального черенковского резонанса

$$\Omega_{res}^2 = \omega_p^2 - \kappa_\perp^2 u^2 \gamma^2. \tag{14}$$

Величина Ω_{res}^2 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При $\Omega_{res}^2 < 0$ пространственное усиление пучковой волны отсутствует. Теперь можно записать условие применимости решений (10) – (13), которое выглядит следующим образом:

$$\frac{\omega_b \gamma^{-3/2}}{\sqrt{|\Omega_{res}^2|}} << 1. \tag{15}$$

Однако, если параметры плазмы, пучка и волновода удовлетворяют условию $\omega_p = \kappa_\perp u\gamma$, что соответствует $\omega = au$, то в системе имеет место черенковское усиление волн в широком спектре частот. В этом случае решение уравнения (4) качественно иное. Для обратной электромагнитной волны получаем

$$k_2 = -\frac{\omega}{u}(1 + \Delta), \tag{16}$$

где

$$\Delta = -\frac{1}{8}\frac{\omega_b^2}{\omega_p^2}\frac{\Delta_b}{\Delta_p}\gamma^{-5}. \tag{17}$$

Для волн, сопутствующих пучку, имеем

$$k_\nu = \frac{\omega}{u}(1 + \delta x_\nu), \quad \nu \neq 2. \tag{18}$$

Здесь

$$\delta x_1 = e^{\frac{2}{3}\pi i}(4\Delta)^{1/3}, \ \delta x_3 = e^{\frac{4}{3}\pi i}(4\Delta)^{1/3}, \ \delta x_4 = (4\Delta)^{1/3}. \tag{19}$$

Пространственное усиление волн возможно только в условиях черенковского резонанса. Тогда рост амплитуды поля происходит за один проход волны.

В многопроходных системах, когда волна, отражаясь от стенок резонатора, многократно проходит через волновод, выполнение условия черенковского резонанса не обязательно. В основе работы такого генератора как раз и лежит излучательная неустойчивость Пирса, которая возникает в системе как только появляется положительная обратная связь. При этом физическая природа волны и ее конкретный вид принципиальной роли не играют [5, 6].

Для рассмотрения неустойчивости необходимо задать граничные условия на торцах резонатора, то есть описать процесс отражения и трансформации волн. Условие невозмущенности пучка по току и заряду на входной границе, а также условие зеркального отражения волн приводят к алгебраической системе

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_\nu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}{(\omega - k_\nu u)^2} k_\nu A_\nu = 0, \sum_{\nu=1}^{4} \frac{k_\nu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}{(\omega - k_\nu u)^2} A_\nu = 0, \ \sum_{\nu=1}^{4} k_\nu A_\nu = 0, \tag{20}$$

которую дополним условием трансформации волн на правой излучающей границе волновода

$$A_2 e^{ik_2 L} = \sum_{\nu \neq 2} \kappa_\nu A_\nu e^{ik_\nu L}. \tag{21}$$

Здесь A_ν – амплитуда волны с индексом ν в точке $r = r_p$, κ_ν – коэффициенты трансформации сопутствующих волн в обратную электромагнитную волну. Подбором κ_ν можно добиться описания реальных излучающих устройств, когда волны A_1, A_3, A_4 частично трансформируются в волну A_2 и частично – в волны излучающего рупора.

Условие нетривиальности решения системы (20), (21) дает дисперсионное уравнение, определяющее собственные частоты плазменно-пучкового резонатора. Рассмотрим теперь отдельно работу генератора при больших и малых отстройках от черенковского резонанса.

При больших отстройках от черенковского резонанса, когда выполнено условие (15), фазовые скорости электромагнитной и пучковых волн сильно различаются. В этом случае κ_1 есть коэффициент отражения электромагнитной волны, для которого всегда выполнено условие $|\kappa_1| \leq 1$. Коэффициенты трансформации пучковых волн равны между собой с точностью до слагаемых порядка ω_b, поэтому можно положить $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_b$. Для рассматриваемого случая можно воспользоваться готовым результатом [6] и выписать инкременты излучательной неустойчивости Пирса на плазменной кабельной волне

$$\delta\omega = (-1)^n \frac{|\kappa_b|}{\sqrt{|\kappa_1|}} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^3 \frac{k_\perp^2 u^2}{\sqrt{\omega_p^2 + \kappa_\perp^2 c^2}} \gamma^4 \frac{\alpha\omega_b uc}{L\Omega_{res}^2} \sin(\alpha\omega_b L) e^{i\theta}. \tag{22}$$

Здесь

$$\theta = \frac{\omega L}{u} + \arg\kappa_b - \frac{1}{2}\arg\kappa_1 \tag{23}$$

– приведенный пролетный угол электронов пучка.

Параметр a, определяемый из невозмущенного дисперсионного уравнения, равен

$$a = \frac{\pi n}{L} - \frac{1}{2L}\arg\kappa_1 + \frac{i}{2L}\ln|\kappa_1|. \tag{24}$$

Частота возбуждаемых собственных мод в резонаторе равна

$$\omega = c\sqrt{-k_\perp^2 + (\mathrm{Re}a)^2}. \tag{25}$$

Декремент, связанный с потерями на излучение, равен

$$\delta = \frac{d\omega}{da}\mathrm{Im}\, a = \frac{c}{2L}\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 + \kappa_\perp^2 c^2}} \ln\frac{1}{|\kappa_1|}. \tag{26}$$

Рассмотрим случай, когда $\Omega_{res}^2 < 0$. Этот случай соответствует отсутствию черенковского усиления в системе. Поэтому генерация СВЧ излучения может происходить только за счет развития вынужденной излучательной неустойчивости Пирса. Условие развития генерации $\mathrm{Im}\,\delta\omega > \delta$ приводит к неравенству

$$(-1)^{n+1}\sin(\alpha\omega_b L)\sin\theta > \frac{\omega_{b\,st}}{\omega_b}, \tag{27}$$

в котором стартовая ленгмюровская частота электронов пучка $\omega_{b\,st}$ определяется выражением

$$\omega_{b\,st} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \frac{|\Omega_{res}^2|^{3/2}}{k_\perp^2 u^2 \gamma^{5/2}} \sqrt{\frac{\Delta_p}{\Delta_b}} \frac{\sqrt{|\kappa_1|}}{|\kappa_b|} \ln\frac{1}{|\kappa_1|}. \tag{28}$$

В противоположном случае ($\Omega_{res}^2 > 0$) условие развития вынужденной излучательной неустойчивости Пирса приобретает вид

$$(-1)^{n+1}\sin\theta > \frac{\omega_{b\,st}}{\omega_b \mathrm{sh}(|\alpha|\omega_b L)}. \tag{29}$$

Полученные выражения справедливы вдали от черенковского резонанса. В случае пространственного усиления волн картина становится иной. Прежде, чем рассмотреть развитие излучательной неустойчивости Пирса в присутствии черенковского резонанса, обратим внимание на тот факт, что для спектра (7) поверхностной плазменной волны условие черенковского резонанса $\Omega_{рез} = \omega_p^2 - \kappa_\perp^2 u^2 \gamma^2 = 0$ не зависит от частоты усиливаемой волны в широком диапазоне низких частот. Это обстоятельство исключает необходимость подбирать длину резонатора L для совпадения одной из собственных мод резонатора с резонансной частотой.

Так как фазовые скорости сопутствующих волн равны между собой в отсутствие пучка, то можно положить $\kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa$ для пучков малой плотности. В этом случае κ – коэффициент отражения плазменной волны от рупора, измеренный или вычисленный без пучка. На самом деле коэффициенты трансформации κ_ν отличаются друг от друга на величину порядка $\omega_b^{2/3}$. Разлагая функцию $\kappa_\nu = \kappa_\nu(k_\nu)$ в ряд Тейлора вблизи точки $k_\nu = \omega/u$, можно показать, что в дисперсионном уравнении слагаемые, отвечающие высоким членам разложения $\kappa_\nu(k_\nu)$, зануляются в силу тождества $\delta x_1 + \delta x_3 + \delta x_4 = 0$. Исходя из вышесказанного, уравнение (21) примет вид

$$e^{-2i\frac{\omega L}{u}} = \kappa \sum_{\nu \neq 2} \frac{A_\nu}{A_2} e^{i\frac{\omega L}{u}(\delta x_\nu + \Delta)}. \tag{30}$$

Здесь отношения A_ν/A_2 определяются из уравнений (20). Прологарифмировав (30), найдем

$$\omega = \frac{\pi u}{L}\left(n - \frac{\arg\kappa}{2\pi}\right) + i\frac{u}{2L}\left[\ln \sum_{\nu \neq 2} \frac{A_\nu}{A_2} e^{i\frac{\omega L}{u}(\delta x_\nu + \Delta)} - \ln\frac{1}{|\kappa|}\right] \tag{31}$$

Рассмотрим случай малого усиления по длине резонатора, когда

$$\frac{\omega L}{u}|\delta x_\nu| << 1. \tag{32}$$

При условии (32) под знаком суммы удерживаются все слагаемые, то есть в данном режиме генерации участвуют все волны.

В основе такой генерации лежит излучательная неустойчивость Пирса, поэтому режим будем называть пирсовским.

В этом случае комплексная частота генерации равна

$$\omega = \frac{\pi u}{L}\left(n - \frac{\arg\kappa}{2\pi}\right) + i\frac{u}{2L}\left(2\Delta - \ln\frac{1}{|\kappa|}\right). \tag{33}$$

Мнимая часть выражения (33) дает инкремент генерации

$$\delta_г = \frac{u}{2L}\left(2\Delta - \ln\frac{1}{|\kappa|}\right). \qquad (34)$$

Вдали от черенковского резонанса ($\omega \neq k_{\|}u$) инкремент неустойчивости Пирса определяется сдвигом волнового числа δk_3 медленной пучковой волны [6]. При черенковском резонансе, как следует из (34), инкремент неустойчивости определяется сдвигом волнового числа Δ обратной волны.

Развитие неустойчивости имеет место только для $\Delta > 0$ (этот случай реализуется, например, для бесконечнотонкой трубчатой плазмы и однородного по сечению резонатора пучка). Для рассматриваемой задачи, как следует из (17), $\Delta < 0$. Это означает, что при малом черенковском усилении по длине резонатора (32) генерация в системе отсутствует. Более того, любые привносимые извне возмущения будут затухать даже при отсутствии омических и излучательных потерь.

Рассмотрим теперь случай, когда усиление на длине резонатора велико

$$\frac{\omega L}{u}|\delta x_\nu| \gtrsim 1. \qquad (35)$$

Оставляя в сумме только усиливающую волну, получаем

$$\omega = \frac{\pi u}{L}\left(n - \frac{\arg\kappa}{2\pi}\right) - \frac{\omega}{2}\delta x_1 - i\frac{u}{2L}\ln\frac{3}{|\kappa|}. \qquad (36)$$

В главном порядке

$$\omega = \omega_{(0)} = \frac{\pi u}{L}\left(n - \frac{\arg\kappa}{2\pi}\right) - i\frac{u}{2L}\ln\frac{3}{|\kappa|}. \qquad (37)$$

Полагая, что колебания в резонаторе являются почти гармоническими ($\mathrm{Im}\omega_{(0)} << \mathrm{Re}\omega_{(0)}$), находим инкремент генерации

$$\delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\gamma^{-5/3}\omega\left(\frac{\omega_b}{\omega_p}\right)^{2/3} - \frac{u}{2L}\ln\frac{3}{|\kappa|}. \qquad (38)$$

Стартовая ленгмюровская частота электронов пучка в этом случае определяется выражением

$$\omega_{b\,st} = \frac{4}{3^{3/4}}\gamma^{5/2}\omega_p\left(\frac{u}{\omega_L}\ln\frac{3}{|\kappa|}\right)^{3/2}. \qquad (39)$$

Здесь мы имеем генератор, работающий на черенковском усилении, когда в генерации участвуют практически две волны: сопутствующая усиливаемая и обратная электромагнитная. Детальное рассмотрение данного механизма можно найти в монографии [4].

Таким образом, даже в отсутствие потерь на излучение, черенковский генератор имеет порог по току пучка. Механизм отвода энергии из процесса генерации заключается в том, что обратная отраженная волна $A_2 e^{-i\omega t + i k_2 z}$ трансформируется на входном электроде в три сопутствующие пучку волны, из которых только одна усиливаемая волна ($\mathrm{Im}\, k_1 < 0$) участвует в генерации.

В заключение отметим, что в силу универсальности пирсовского механизма возбуждения колебаний, при достаточно высокой отражающей способности рупора пирсовская генерация всегда присутствует в системе. Независимо от плотности плазмы и длины волновода существуют пирсовские моды, для которых выполняется условие генерации (27). При достаточно большом черенковском усилении по длине, черенковский механизм будет преобладать, однако изменение параметров системы может привести к переходу из черенковского режима в пирсовский. Так, уменьшение длины и увеличение плотности плазмы ослабляют черенковскую генерацию, но увеличивают инкременты пирсовских мод. Последнее, возможно, объясняет генерацию колебаний при небольших длинах и большой плотности плазмы, полученную в экспериментах в ИОФАНе [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кузелев М. В., Мухаметзянов Ф. Х., Рабинович М. Е. и др. ЖЭТФ, **83**, 1358 (1982).

[2] Кузелев М. В., Лоза О. Т., Пономарев А. В. и др. ЖЭТФ, **109**, 2048 (1996).

[3] Клочков Д. Н., Пекар М. Ю. Физика плазмы, **23**, 650 (1997).

[4] Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электромагнитных пучков в плазме. М., Наука, 1990.

[5] Клочков Д. Н., Рухадзе А. А. Физика плазмы, **23**, 646 (1997).

[6] Клочков Д. Н., Пекар М. Ю., Рухадзе А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 10, 38 (1999).

[7] Стрелков П. С., Ульянов Д. К. Физика плазмы, **26**, (2000).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 14 марта 2000 г.