

УДК 501.534.1

О НАБЛЮДЕНИИ ЗА СИГНАЛОМ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ АПЧ

С. А. Решетняк, Г. Н. Третьяков, В. А. Щеглов

Используя аналогию между поведением следящей за сигналом системы и броуновской частицы, на примере устройства автоматической подстройки частоты исследована вероятность срыва слежения при наличии помехи в зависимости от основных параметров системы.

Качество приема сигнала в значительной мере зависит от точности настройки приемника на частоту сигнала. Из-за нелинейности характеристики дискриминатора и наличия помехи может произойти срыв слежения за сигналом. Наиболее полная постановка проблемы срыва слежения содержится в [1 - 3]. Для коэффициента передачи $K(p)$ определенного вида [2] поведение следящей системы подобно движению броуновской частицы в потенциальном поле. Вероятность срыва вычисляется так же, как и скорость химической реакции в теории Крамерса [4]. Используя рассмотренные в [4] предельные случаи, в [5] найдена вероятность срыва для больших и малых постоянных времени фильтра T . Ниже на основе [6] вероятность срыва получена для произвольных T .

Поступающая в приемник сигнальная частота равна $\Omega_S = \Omega_0 + \Omega_D(t)$, где Ω_0 - несущая частота, Ω_D - доплеровский сдвиг, зависящий от времени из-за относительного движения приемного и передающего устройств. Система автоматической подстройки частоты (АПЧ) содержит дискриминатор, который сравнивает Ω_S с частотой Ω_g гетеродина и в зависимости от расстройки $x = \Omega_S - \Omega_g$ формирует напряжение $F(x)$. Под действием $F(x)$ генератор изменяет свою частоту так, чтобы приблизить ее к Ω_S . Дискриминационная характеристика $F(x)$ нелинейна и ее вид изображен на рис. 1. Другой важной характеристикой АПЧ является операторный коэффициент передачи $K(p)$ фильтрующих цепей и генератора. Если на вход генератора приложено напряжение U , то его частота $\Omega_g = K(p)U$. Ниже рассматривается случай $K(p) = k/p(1 + pT)$, где k - коэффициент усиления, T - постоянная времени фильтра.

Наряду с сигналом имеется помеха, которая формирует шумовое напряжение. Обозначая через \sqrt{N} интенсивность шума и учитывая его широкий спектр по сравнению с полосой фильтра, имеем:

$$\Omega_g = \frac{k}{p(1+pT)} [F(x) + \sqrt{N}\xi(t)], \quad p = \frac{d}{dt},$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t').$$

В случае равномерно ускоренного движения ($\Omega_D = Gt$) уравнение для расстройки x имеет вид:

$$T \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -kF(x) + G - k\sqrt{N}\xi(t).$$

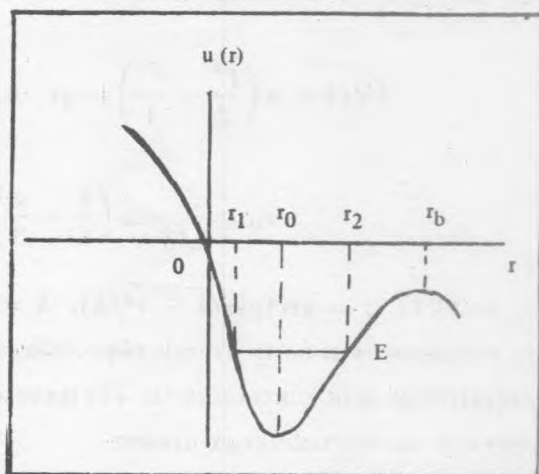
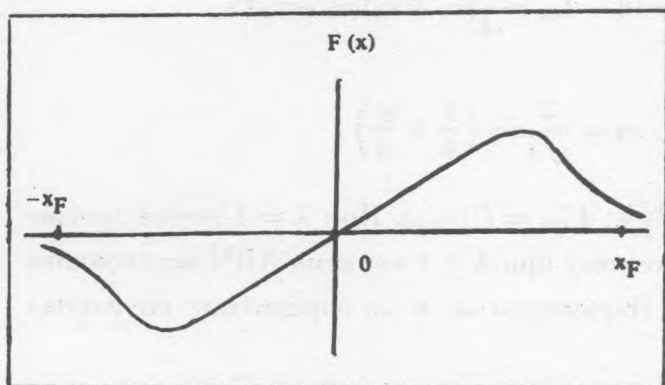


Рис. 1. Вид дискриминационной функции $F(x)$.

Рис. 2. Вид типичной потенциальной функции $U(r)$.

Обозначая через x_F (рис. 1) размер апертуры характеристики $F(x)$, переход к безразмерным переменным $\tau = t/T$, $r = x/x_F$ дает

$$\frac{dv}{d\tau} + v = -U'(r) + \varphi(\tau), \quad \frac{dr}{d\tau} = v,$$

$$\langle \varphi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \varphi(\tau)\varphi(\tau') \rangle = 2\epsilon\delta(\tau - \tau'), \tag{1}$$

где $\epsilon = k^2 NT / 2x_F^2$, $U(r) = \frac{kT}{x_F} \int F(r) dr - gr$, $g = GT/x_F$.

Уравнение (1) описывает движение броуновской частицы с массой и коэффициентом трения равными единице в потенциальном поле $U(r)$ (рис. 2). Для линейной $F(x)$ имеется "возвращающая сила", стремящаяся уменьшить расстройку по величине, и ее нет в тех областях, где $F(x)$ падает с ростом x . Поэтому под срывом слежения понимается выход расстройки за границы апертуры $F(x)$, который определяется преодолением потенциального барьера под действием шума.

Эквивалентное (1) уравнение для функции распределения вероятности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v \frac{\partial f}{\partial r} - U'(r) \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(v f + \epsilon \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (2)$$

Используя аппроксимацию $F(x) \doteq Sx - Rx^3$, $-x_F < x < x_F$, $x_F = \sqrt{S/R}$, находим точки экстремума потенциала и высоту h его барьера:

$$U(r) = a \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) - gr, \quad h = U_b - U_0 = \frac{a}{4} (r_b + r_0)(r_b - r_0)^3,$$

$$r_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3} \right), \quad r_b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3} \right),$$

где $a = SkT$, $\varphi = \arctg(\sqrt{1 - \lambda^2}/\lambda)$, $\lambda = \frac{3\sqrt{3}g}{2a}$, $U_{0,b} = U(r_{0,b})$. При $\lambda = 1$ точки экстремума сливаются в одну точку перегиба. Поэтому при $\lambda \geq 1$ система АПЧ неустойчива и непригодна для слежения за сигналом. Параметры ω_0 и ω_b определяют потенциал вблизи его экстремальных точек:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (r - r_0)^2, \quad \omega_0^2 = a(1 - 3r_0^2), \quad r \sim r_0$$

$$U = U_b - \frac{1}{2} \omega_b^2 (r - r_b)^2, \quad \omega_b^2 = a(3r_b^2 - 1), \quad r \sim r_b.$$

Уравнение (2) допускает упрощение в анализе для больших и малых ω_0 . При $\omega_0 \ll 1$ (малые T) состояние системы АПЧ на фазовой плоскости (r, v) совершает хаотическое движение, подобное диффузии броуновской частицы по координате. При $\omega_0 \gg 1$ (большие T) на фазовой плоскости существуют замкнутые траектории, определяемые полной энергией E частицы. При этом частота ω обращения по траектории и ее площадь I (действие) определяются формулами

$$\omega^{-1}(r_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{r_1}^{r_2} [E - U(r)]^{-1/2} dr, \quad I(r_2) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} [E - U(r)]^{1/2} dr, \quad (3)$$

где r_1 и r_2 – левая и правая точки поворота, в которых $E = U(r_1) = U(r_2)$ (рис. 2). В этом случае диффузия происходит по энергии E или амплитуде r_2 колебаний.

Для произвольных ω_0 мы используем результаты работы [6], в которой представлен анализ (2) на основе одномерного уравнения с эффективным потенциалом и коэффициентом диффузии. Такой подход позволяет рассчитать скорость срыва с точностью до коэффициента, не превышающего 2 [6]. Вероятность P срыва слежения определялась по формуле:

$$P = 1 - \int_{-1}^1 \rho(t, r) dr, \quad \rho = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, r, v) dv.$$

Для уравнения (2) рассматривались следующие начальное и граничные условия:

$$P|_{t=0} = 0, \quad U' \rho + \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial r} \Big|_{r=-1} = 0, \quad \rho|_{r=1} = 0. \quad (4)$$

Тесная связь между поведением системы АПЧ и броуновской частицы проявляется в том, что скорость W срыва слежения соответствует скорости диссоциации двухатомной молекулы. Аналогичные [6] вычисления приводят к следующей вероятности срыва слежения:

$$P = 1 - \exp(-Wt), \quad W = (T\tau_0)^{-1}, \quad \tau_0 = \tau_1 + \tau_2, \quad (5)$$

$$\tau_1 = \frac{U'_S}{\epsilon\omega_S} \int_{r_0}^{r_S} \exp\left(\frac{U}{\epsilon}\right) q I^{-1} U' dr, \quad \tau_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{r_S}^1 \exp\left(\frac{U}{\epsilon}\right) [q(r_S) + g(r)] dr,$$

$$q(r) = \frac{\omega_S}{U'_S} \int_{r_0}^r \exp\left(-\frac{U}{\epsilon}\right) \omega^{-1} U' dr, \quad g(r) = \int_{-1}^{r_1 S} \exp\left(-\frac{U}{\epsilon}\right) dr + \int_{r_S}^r \exp\left(-\frac{U}{\epsilon}\right) dr,$$

где $\omega_S = \omega(r_S)$, $U'_S = U'(r_S)$, r_{1S} – соответствующая r_S левая точка поворота, r_S – корень уравнения

$$U'_S = \sqrt{\omega_S I_S}. \quad (6)$$

Уравнение (6) получено таким образом, что в области $r > r_S$ происходит диффузия частицы по координате, а при $r < r_S$ - диффузия по энергии или амплитуде колебаний около положения равновесия r_0 . Это уравнение определяет постоянную T времени фильтра в зависимости от r_S . При изменении r_S от r_0 до r_b из формулы (5) получаются предельные случаи [4]. Малые T соответствуют переходу $r_S \rightarrow r_0$:

$$\tau_1 \ll \tau_2, \tau_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{r_0}^1 \exp\left(\frac{U}{\epsilon}\right) dr \int_{-1}^r \exp\left(-\frac{U}{\epsilon}\right) dr' = \frac{2\pi}{\omega_0 \omega_b} \exp\left(\frac{h}{\epsilon}\right), h \gg \epsilon. \quad (7)$$

Предельный случай больших T реализуется при $r_S \rightarrow r_b$:

$$\tau_1 \gg \tau_2, \tau_1 = \frac{1}{\omega_0 I_b} \int_{r_0}^{r_b} \exp\left(\frac{U}{\epsilon}\right) U' dr = \frac{\epsilon}{\omega_0 I_b} \exp\left(\frac{h}{\epsilon}\right), h \gg \epsilon, I_b = I(r_b). \quad (8)$$

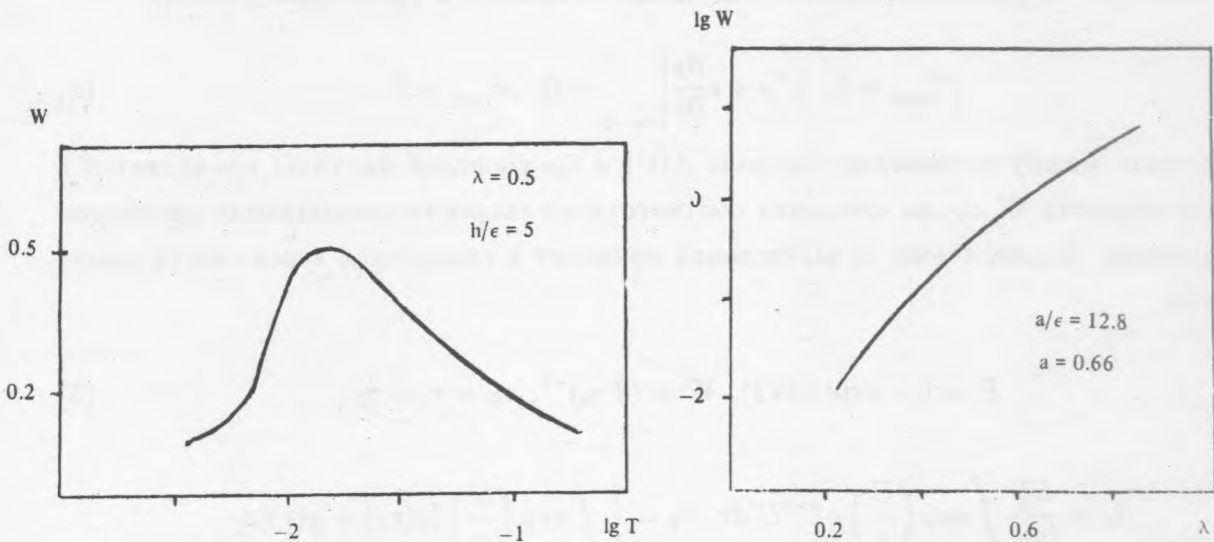


Рис. 3. Скорость срыва в зависимости от постоянной времени фильтра.

Рис. 4. Скорость срыва как функция параметра λ .

На рис. 3 представлены результаты расчета W по формуле (5) в зависимости от T . Для малых и больших T скорость W определяется предельными значениями (7) и (8). Эта кривая аналогична зависимости скорости химической реакции от давления газа [6]. С ростом T система АПЧ становится более инерционной, поэтому $W \sim T^{-1}$. Падение чувствительности АПЧ при больших T является нежелательным и постоянную T

следует выбирать из условия $\omega_0 \lesssim 1$. Расчеты показывают, что скорость W в зависимости от коэффициента усиления Sk в кольце слежения экспоненциально растет. Это объясняется возрастанием интенсивности шума с ростом Sk . На рис. 4 представлена скорость W как функция параметра λ пропорционального ускорению относительного движения приемника и передатчика. С ростом λ уменьшаются величина и ширина потенциального барьера, увеличивается роль помехи, что приводит к росту W . По этой причине в следящих системах используются коэффициенты передачи $K(p)$ другого вида. Наконец отметим, что формула (5) найдена для левой отражающей границы (4). Это предположение оправдано при $\lambda \gtrsim 0,2$. В случае малых параметров λ потенциал почти симметричен и вероятность срыва будет в два раза больше. Однако оценку скорости W по порядку величины можно получить на основе (5) для произвольных λ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лебедев В. Л. Случайные процессы в электрических и механических системах. М., Физматгиз, 1958.
- [2] Обрезков Г. В., Разевич В. Д. Методы анализа срыва слежения. М., Сов. радио, 1972.
- [3] Тихонов В. И., Мионов М. А. Марковские процессы. М., Сов. радио, 1977.
- [4] Kramers H. A. *Physica (The Hague)*, **7**, 284 (1940).
- [5] Первачев С. В. *Радиотехника и электроника*, N 8, 1435 (1965).
- [6] Решетняк С. А. *Физика плазмы*, **14**, N 10, 1228 (1988).

Поступила в редакцию 15 июня 1994 г.