УДК 530.145

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ АМПЛИТУД ВЕРОЯТНОСТИ

А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин

Обсуждается аксиоматика теории амплитуд вероятности.

В настоящее время целесообразность математически строгого построения теории амплитуд вероятности представляется очевидной. Один из возможных вариантов аксиоматики был предложен В. П. Масловым [1]. Рассматриваемый здесь более простой вариант частично обсуждался в работах [2 – 4]. В данной работе мы последовательно сформулируем основные определения, опираясь при этом на аналогию с обычной теорией вероятностей и понятия, сформировавшиеся в квантовой механике.

Определение 1. Событием ("состоянием") ψ_1 назовем нормированный вектор гильбертова пространства H.

Определение 2. Амплитудой вероятности события ψ_1 относительно события ψ_2 назовем скалярное произведение $A(\psi_1, \psi_2) = <\psi_1 \mid \psi_2>$.

Определение 3. Назовем события несовместными, если $<\psi_1 \mid \psi_2> = 0$.

Структура пространства событий в случаях теории амплитуд и теории вероятностей существенно различна. События в обычной теории вероятностей образуют σ-алгебру, замкнутую относительно операций счетного пересечения и объединения, а вероятность $P(B)$ сопоставляется одному событию B. В теории амплитуд объединение событий не определено, а амплитуда есть функция двух событий (причем модуль амплитуды служит количественной мерой пересечения этих событий). Здесь имеется аналогия с теорией относительности, где всегда необходимо указывать систему отсчета. Иными словами, амплитуда события может быть задана только по отношению к некоторому другому событию. Роль системы отсчета играет полная группа событий, отвечающая некоторому базису гильбертова пространства.

Определение 4. Плотностью распределения ("волновой функцией") события ψ назовем функцию $\psi(x) = < x \mid \psi >$, где $\{\mid x >\}$ – ортонормированный базис гильбертова пространства (x – непрерывная переменная), рядом распределения – набор $\psi_n = < n \mid \psi >$, где $\{\mid n >\}$ – дискретный базис.

Таким образом, событию в теории амплитуд может быть сопоставлена некоторая функция (в зависимости от типа гильбертова пространства действительная, комплексная, кватернионная), а не число, как в теории вероятностей.

Элементы ортонормированного базиса представляют собой несовместные события, по которым можно разложить произвольное событие, т. е. служат аналогом множества элементарных событий в обычной теории вероятностей.

Отметим, что амплитуда вероятности события согласно определению 2 уже является условной (она определена лишь по отношению к другому событию) и поэтому не возникает необходимости введения отдельного понятия условной амплитуды.

Аналог формулы полной вероятности, очевидно, имеет вид:

$$< \psi_1 \mid \psi_2 >= \sum_n < \psi_1 \mid n >< n \mid \psi_2 > \quad \text{или} \quad < \psi_1 \mid \psi_2 >= \int < \psi_1 \mid x >< x \mid \psi_2 > dx.$$

Определение 5. Случайной величиной A назовем линейный самосопряженный оператор A.

Согласно определению 5, каждой паре элементарных событий сопоставляется число (действительное, комплексное, кватернион) $\alpha_n^m = < m \mid A \mid n >= \bar{\alpha}_m^n$ (или $\alpha(x, x') = < x \mid A \mid x' >$), подобно тому как в обычной теории вероятности каждому элементарному событию B_i сопоставляется действительное число $f(B_i)$. Линейность оператора A требуется для того, чтобы по α_n^m можно было определить значение случайной величины для любой пары событий $\mid \psi_1 >$, $\mid \psi_2 >$, подобно тому, как требуется измеримость функции $f(B_i)$ относительно введенной на множестве элементарных событий вероятности.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины A определяются согласно формулам $M[A] = < \psi \mid A \mid \psi >$, $D[A] = M[A^2] - (M[A])^2$. Для дискретных случайных величин имеем:

$$M[A] = \sum \psi_m \alpha_n^m \bar{\psi}_n,$$

$$D[A] = \sum \psi_m \bar{\psi}_n (\alpha_n^i \alpha_i^m - \psi_i \alpha_n^i \alpha_j^m \bar{\psi}_j). \tag{1}$$

Связь теории амплитуд с обычной теорией вероятностей наглядно проявляется при рассмотрении случайных величин по отдельности, вне зависимости друг от друга. Для установления этой связи приведем следующую вероятностную "надстройку" над понятиями теории амплитуд.

Рассмотрим некоторую случайную величину A в собственном базисе $| n >$, где она характеризуется диагональными элементами α_n^n. При построении σ-алгебры в качестве множества элементарных событий возьмем несовместные события $| n >$; в этом случае элементами σ-алгебры будут являться события вида

$$0, | n >, \{| n_1 >, | n_2 >\}, \{| n_1 >, | n_2 >, | n_3 >\}, ... \tag{2}$$

Каждому элементу σ-алгебры сопоставим вероятность $p = \sum_i |< \psi \mid n_i >|^2$. С точки зрения теории амплитуд событиями являются лишь элементы $\{| n >\}$; они могут быть охарактеризованы как амплитудой $\psi_n =< \psi \mid n >$, так и вероятностью $p_n =| \psi_n |^2$, прочие элементы σ-алгебры (2) – лишь вероятностью. Например; событие, состоящее в том, что электрон, находящийся в состоянии $| \psi >$, будет найден на первом или втором уровне, не характеризуется амплитудой, хотя ему отвечает вероятность $| \psi_1 |^2 + | \psi_2 |^2$.

В собственном базисе согласно (1)

$$M[A] = \sum \alpha_n^n \mid \psi_n \mid^2 = \sum \alpha_n^n p_n,$$

$$D[A] = \sum \mid \psi_n \mid^2 (\alpha_n^n)^2 (1 - \mid \psi_n \mid^2) = \sum (\alpha_n^n)^2 p_n (1 - p_n). \tag{3}$$

Если определить вероятность $P(A < t) = \sum p_n$, где суммирование производится по всем n, для которых $\alpha_n^n < t$, то A будет являться случайной величиной и с точки зрения обычной теории вероятностей с математическим ожиданием и дисперсией (3). Для такой случайной величины будут выполняться все теоремы обычной теории и, в частности, неравенство Чебышева $P(| A - M[A] |\geq t) \leq D[A]/t^2$.

Существенные отличия теории амплитуд проявляются при рассмотрении совокупностей случайных величин. Действительно, в обычной теории вероятностей достаточно взять вероятность какого-либо элементарного события $p_1 = 1$ и тогда для любой случайной величины дисперсия $D[A] = 0$. В теории амплитуд так подобрать ψ_n невозможно (иными словами, не существует события, при наступлении которого все случайные величины были бы точно определены), и имеют место соотношения неопределенностей.

Среднеквадратичные отклонения и дисперсии случайных величин A_i удовлетворяют соотношениям

$$\Delta A_1 \Delta A_2 \geq \frac{1}{2} \left| < \psi \mid A_1 A_2 - A_2 A_1 \mid \psi > \right|, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D[A_i] \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \left| < \psi \mid A_j A_k - A_k A_j \mid \psi > \right|. \tag{5}$$

Доказательство (4) приведено, например, в [3], а (5) получается из (4) при учете очевидного неравенства $D[A] + D[B] \geq 2\Delta A \Delta B$. Тем не менее, существуют состояния, в которых среднеквадратичные отклонения становятся пренебрежимо малыми по сравнению с абсолютными величинами (например, когерентные состояния различных групп при больших значениях некоторых своих параметров).

Рассмотрим схематически связь закона больших чисел и предельных теорем теории амплитуд вероятности с условиями перехода к классическому пределу и принципом соответствия в квантовой механике. Для этого воспользуемся понятием ковариантного символа оператора

$$Q_A(u, \bar{v}) = < u \mid A \mid v > / < u \mid v >,$$

где $\mid u >$ и $\mid v >$ – элементы некоторого переполненного (неортогонального) базиса с разложением единицы $\hat{1} = \int \mid u >< u \mid d\mu(u)$ (подробнее о переполненных базисах см. [5, 6]; u и v будем считать наборами комплексных чисел). Естественность понятия ковариантного символа подчеркивается тем фактом, что символ единичного оператора равен единице.

Скалярное произведение $< u \mid v >$ служит воспроизводящим ядром в пространстве функций $\psi(v) = < v \mid \psi >$. Здесь имеется прямая аналогия с устойчивыми распределениями в обычной теории вероятностей: сворачивание двух распределений с помощью разложения единицы, $\int < u \mid v >< v \mid w > d\mu(v) = < u \mid w >$, дает распределение того же вида, что и исходные.

Величина $\rho(u, v)$, $\rho^2(u, v) = -\ln(|< u \mid v >|^2)$, является симметрикой – она удовлетворяет всем аксиомам расстояния, кроме аксиомы треугольника [7]. Следовательно, при малых du с точностью до членов более высокого порядка по du $\rho^2(u, u + du) \cong d\rho^2$, где $d\rho^2$ – положительно определенная квадратичная часть разложения $\rho^2(u, u + du)$ по степеням du. Для комплексных многообразий $d\rho^2 = g^{i\bar{k}} du_i d\bar{u}_k$, $g^{i\bar{k}} = \partial^2(\rho^2)/\partial u_i \partial \bar{u}_k$.

Квадрат модуля перекрытия $|< u \mid v >|^2 = \exp(-\rho^2(u,v))$ в малой окрестности точки $v = u,\ v = u + du$ имеет вид:

$$|< u \mid v >|^2 \cong \exp(-g^{i\bar{k}} du_i d\bar{u}_k). \tag{6}$$

Правая часть формулы (6) представляет собой многомерное нормальное распределение. Предельные теоремы должны говорить об условиях, при которых (6) имеет место при любых, а не только малых du. Последнее выполняется, в частности, если $|< u \mid v >|^2$ существенно отличается от нуля лишь при малых du. Некоторые конкретные примеры рассмотрены в [2, 3, 7].

Для Q-символа произведения AB имеем:

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) = \int < u \mid A \mid v >< v \mid A \mid u > d\mu(v) = \int Q_A(u,\bar{v})Q_B(v,\bar{u})\,|< u \mid v >|^2\, d\mu(v). \tag{7}$$

Если условие (6) выполнено при произвольных $u' = v - u$, то

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) = \int Q_A(u,\bar{u}+\bar{u}')Q_B(u+u',\bar{u})\exp(-g^{i\bar{k}}u'_i\bar{u}'_k)d\mu(u+u').$$

Если символы Q_A и Q_B являются несингулярными (дифференцируемыми), то, разлагая в ряд по степеням u' произведение $Q_A(u,u+u')Q_B(u+u',u)$ (аналогично тому, как это делается при нахождении асимптотических разложений с помощью метода перевала), получим для первых двух ненулевых членов

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) \cong Q_A(u,\bar{u})Q_B(u,\bar{u}) +$$

$$+ \int \partial Q_A(u,\bar{u})/\partial\bar{u}_k\ \partial Q_B(u,\bar{u})/\partial u_i\ \bar{u}'_k u'_i \exp(-g^{i\bar{k}}u'_i\bar{u}'_k)d\mu(u+u') \cong$$

$$\cong Q_A(u,u)Q_B(u,u) + g^{i\bar{k}}\,\partial Q_A(u,\bar{u})/\partial\bar{u}_k\ \partial Q_B(u,\bar{u})/\partial u_i.$$

Таким образом, требования выполнения условия (6) и несингулярности символов приводят к выполнению первого и второго требований принципа соответствия:

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) \cong Q_A(u,\bar{u})Q_B(u,\bar{u}), \tag{8}$$

$$Q_{AB}(u,\bar{u}) - Q_{BA}(u,\bar{u}) \cong \{Q_A(u,\bar{u}), Q_B(u,\bar{u})\}. \tag{9}$$

Для выполнения (8), как это следует непосредственно из (7), достаточно, чтобы распределение $|< u \mid v >|^2$ при некоторых значениях параметров состояний приближалось к δ-функции (т.е. достаточно использовать аналог закона больших чисел), а символы Q_A и Q_B были при этом несингулярными. При установлении соотношения (9) существенно используются аналоги предельных теорем теории амплитуд.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М., Наука, 1976.

[2] Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **218**, 3 (1994).

[3] Смородинский Я. А., Шелепин Л. А., Шелепин А. Л. УФН, **162**, N1, 1 (1992).

[4] Шелепин А. Л. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 5-6, 60 (1993).

[5] Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера. М., изд-во МГУ, 1983.

[6] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., Наука, 1986.

[7] Gitman D. M., Shelepin A. L. J. Phys. A, **26**, 313 (1993).

Поступила в редакцию 13 июля 1994 г.