УДК 530.1

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША – ГОРДАНА ГРУПП SU(2) И SU(1,1) В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ

О. Д. Семенцов, А. Л. Шелепин, Л. А. Шелепин

Найдены выражения для коэффициентов Клебша – Гордана групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ (дискретная серия) в смешанных базисах. Обсуждается связь с теорией спецфункций.

Теория угловых моментов или теория коэффициентов Клебша – Гордана (коэффициентов КГ) широко используется в различных приложениях. Соответствующие расчетные формулы были систематизированы в [1]. Однако до последнего времени эта теория рассматривалась лишь в стандартном дискретном базисе $\mid jm >$, где j – момент, m – проекция. В работе [2] записаны коэффициенты КГ в базисе когерентных состояний (КС), а в работах [3 – 5] они подробно изучены. В [6] было начато исследование коэффициентов КГ в смешанных базисах.

Цель настоящей работы – рассмотреть систематический подход к обобщенной теории и получить конкретные выражения для коэффициентов КГ в смешанных базисах через гипергеометрические функции.

Существуют три основных типа абстрактных базисов [4]: $\mid jm >$ – обычный дискретный (элементы связаны инфинитезимальными операторами), $\mid ju >$ – непрерывный базис КС (элементы связаны конечными преобразованиями группы), $\mid \theta\phi >$ – базис, параметризуемый точками на инвариантном многообразии. Для группы $SU(2)$ и дискретной серии неприводимых представлений (НП) группы $SU(1,1)$ обозначения являются общими, хотя и имеют разный смысл, соответственно инвариантным многообразиям: сфере и двуполостному гиперболоиду. Базисные функции определяются через перекрытия – скалярные произведения векторов гильбертова пространства. Для группы $SU(2)$ формулы для перекрытий имеют вид:

$$< jm \mid j'm' >= \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \; < \theta\phi \mid \theta'\phi' >= \delta(\phi - \phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta'),$$

$$< j_1 u \mid j_2 v > = (u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2)^{2j}, \tag{1}$$

$$< ju \mid jm > = \left[\frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \right]^{1/2} u_1^{j+m} u_2^{j-m}, \tag{2}$$

$$< \theta\phi \mid jm > = Y_{jm}(\theta, \phi), \tag{3}$$

$$< ju \mid \theta\phi > = \sum_m < ju \mid jm >< jm \mid \theta\phi > .$$

Здесь $Y_{jm}(\theta, \phi)$ – сферическая функция.

Наряду с приведенными тремя основными типами абстрактных базисов можно рассматривать как базисы и их прямые произведения. Перекрытия последних с каким-либо из основных базисов состоят из трех базисных векторов и представляют собой обычные и обобщенные коэффициенты КГ. Так, $< j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel jm >$ – стандартный коэффициент КГ в дискретном базисе, $< j_1 u \mid j_2 v \parallel jw >$ – коэффициент КГ в базисе КС, $< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >$ и $< j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel ju >$ – в смешанных базисах. Можно рассматривать также тройные перекрытия, содержащие элементы базиса $\mid \theta\phi >$. В целом, речь идет о резком расширении теории коэффициентов КГ.

При выводе конкретных выражений для коэффициентов КГ используются формулы разложения единицы

$$\hat{1}_j = \sum_m \mid jm >< jm \mid = \int \mid ju >< ju \mid d\mu(u), \; d\mu(u) = \delta(\mid u_1 \mid^2 + \mid u_2 \mid^2) d^2 u_1 d^2 u_2,$$

$$\hat{1} = \int \mid \theta\phi >< \theta\phi \mid d\mu(\theta, \phi), \; d\mu(\theta, \phi) = \sin\theta \, d\phi \, d\theta,$$

перекрытия типа (1 – 3), а также коэффициент КГ в базисе КС (см. [4, 5])

$$< j_1 u \mid j_2 v \parallel jw > = \rho (u_1 \bar{w}_1 + u_2 \bar{w}_2)^{R_2} (v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2)^{R_1} (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{R_3}, \tag{4}$$

$$\rho = \left[\frac{(R_2 + R_3)!(R_1 + R_3)!(R_1 + R_2 + 1)!}{R_1! R_2! R_3! (R_1 + R_2 + R_3 + 1)!} \right]^{1/2}, \; R_i = \sum_k j_k (-1)^{\delta_{ik}}.$$

Коэффициент КГ вида $< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >$ для группы $SU(2)$ был вычислен в [6]; он выражается через полином Якоби:

$$< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >= \rho \left[\frac{n_1! n_2!}{(n_1+n_2)!} \right]^{1/2} (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{R_3 - n_1} \times$$

$$\times P_{n_1}^{(R_2-n_1, R_1-n_1)} \left(\frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \right) u_2^{R_2 - 2n_1} v_2^{R_1}, \ n_{1,2} = j \pm m. \tag{5}$$

Коэффициент КГ вида $< j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel ju >$ распадается на произведение обычного коэффициента КГ и перекрытия дискретного базиса с базисом КС:

$$< j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel ju >= \sum_m < j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel jm > . < jm \mid ju >=$$

$$= < j_1 m_1 \mid j_2 m_2 \parallel jm_1 + m_2 > < jm_1 + m_2 \mid ju > . \tag{6}$$

Для дискретной серии неприводимых представлений группы $SU(1,1)$ вычисления во многом аналогичны (4) – (6).

Унитарные НП дискретных серий могут быть реализованы в пространстве функций $f(x)$ на однополостном гиперболоиде

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 1, \ x_1 = \operatorname{ch}\theta \cos\phi, \ x_2 = \operatorname{ch}\theta \sin\phi, \ x_0 = \operatorname{sh}\theta$$

со скалярным произведением

$$< f_1 \mid f_2 >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} \overline{f_1(\theta,\phi)} f_2(\theta,\phi) \ \operatorname{ch}\theta \ d\theta,$$

$$T(g) f(x) = f(g^{-1}x) = f(x'), \ x'_i = (\Lambda^{-1})_i^k x_k, \tag{7}$$

где Λ – псевдоортогональная матрица. Вычисление генераторов $\hat{J}_k$ дает

$$\hat{J}_0 = -i\partial/\partial\phi, \ \hat{J}_1 = -i(\operatorname{th}\theta\cos\phi\,\partial/\partial\phi + \sin\phi\,\partial/\partial\theta), \ \hat{J}_2 = i(-\operatorname{th}\theta\sin\phi\,\partial/\partial\phi + \cos\phi\,\partial/\partial\theta),$$

$$\hat{J}_\pm = e^{\pm i\phi}(\pm i \operatorname{th}\theta\,\partial/\partial\phi + \partial/\partial\theta),$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_0^2 - \hat{J}_1^2 - \hat{J}_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta} + \operatorname{th}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{ch}\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi}.$$

Действие повышающего оператора $\hat{J}_+$ на старшие веса $f_j(\theta)e^{ij\phi}$ НП дискретной отрицательной серии дает ноль:

$$\hat{J}_+ f_j(\theta)e^{ij\phi} = e^{i(j+1)\phi}(-j\,\mathrm{th}\,\theta\, f_j(\theta) + \partial f_j(\theta)/\partial\theta) = 0,$$

откуда с точностью до нормировочного множителя $f_j(\theta) = (\mathrm{ch}\,\theta)^j$. Аналогично, для младшего веса $(m = -j)$ НП дискретной положительной серии имеем $(\mathrm{ch}\,\theta)^j e^{-ij\phi}$. Нормировочный множитель находится с помощью скалярного произведения (7) и окончательно для аналогов сферической функции $Y_{jj}(\theta,\phi)$ и $Y_{j-j}(\theta,\phi)$ получим (j отрицательное)

$$Y_{j\pm j}(\theta,\phi) = \left(\frac{2(-2j-3)!!}{\pi(-2j-2)!!}\right)^{1/2} (\mathrm{ch}\,\theta)^j e^{\pm ij\phi}. \tag{8}$$

Функции $Y_{jm}(\theta,\phi)$, $m < j$ (НП T_j^-) могут быть получены действием понижающего оператора $\hat{J}_-$ на старший вес $Y_{j-j}(\theta,\phi)$, а $Y_{jm}(\theta,\phi)$, $m > -j$ (НП T_j^+) – действием повышающего оператора $\hat{J}_+$ на младший вес $Y_{jj}(\theta,\phi)$. По аналогии со сферическими функциями мы будем называть их функциями однополостного гиперболоида,

$$< \theta\phi \mid jm >= Y_{jm}(\theta,\phi), \tag{9}$$

$$< jm \mid j'm' >= \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \ < \theta\phi \mid \theta'\phi' >= \delta(\phi-\phi')\delta(\mathrm{sh}\ \theta - \mathrm{sh}\ \theta'),$$

где $j \leq -1$, целое (для многозначных НП $j < -1/2$, нецелое), а проекция момента $m \geq\mid j \mid$. Функции (8) - (9), как и обычные сферические функции, отличаются лишь множителями от присоединенных функций Лежандра P_m^j. Действительно, собственные функции операторов $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{J}^0$ с собственными значениями $j(j+1)$ и m имеют вид $f(\theta)e^{im\phi}$, где $f(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta} + \mathrm{th}\ \theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\mathrm{ch}\ \theta}m^2\right) f(\theta) = j(j+1)f(\theta),$$

что совпадает с уравнением для присоединенных функций Лежандра

$$\left((1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z} - 2z\frac{\partial}{\partial z} - m^2/(1-z^2)\right) P_j^m(z) = -j(j+1)P_j^m(z)$$

при $z = i\,\mathrm{sh}\,\theta$.

Когерентные состояния НП дискретной серии параметризуются, как известно, точками верхней полы двуполостного гиперболоида $SU(1,1)/U(1)$ [7], причем

$$\hat{1}_j = \sum_m \mid jm >< jm \mid = \int \mid ju >< ju \mid d\mu(u), \;\; d\mu(u) = \delta(\mid u_1 \mid^2 - \mid u_2 \mid^2) d^2u_1 d^2u_2$$

$$\hat{1} = \int \mid \theta\phi >< \theta\phi \mid d\mu(\theta,\phi), \;\; d\mu(\theta,\phi) = \mathrm{ch}\,\theta\; d\phi d\theta.$$

Перекрытия с состояниями дискретного базиса имеют вид [4, 5]:

$$< ju \mid jm > = \left[\frac{\Gamma(-n_2)}{\Gamma(-2j)n_1!}\right]^{1/2} u_1^{n_1} u_2^{n_2}, \;\; n_{1,2} = j \pm m, \;\; j < -1/2.$$

Для дискретной положительной серии НП $-j \le m \le +\infty$, $n_1 \ge 0$, целое, $n_2 < -1/2$, для отрицательной - $-\infty < m \le j$, $n_2 \ge 0$, целое, $n_1 < -1/2$. Используя соотношение $< ju \mid jv > = \sum_m < ju \mid jm >< jm \mid jv >$, легко получить перекрытия КС

$$< ju \mid jv > = (u_1\bar{v}_1 - u_2\bar{v}_2)^{2j}, \;\; < j_1u \mid j_2v \parallel 00 > = (-2j-1)^{-1/2}(u_1v_2 - u_2v_1)^{2j}.$$

Коэффициент КГ в базисе КС [4, 5]

$$< j_1u \mid j_2v \parallel jw > = \rho(u_1\bar{w}_1 - u_2\bar{w}_2)^{R_2}(v_1\bar{w}_1 - v_2\bar{w}_2)^{R_1}(u_1v_2 - u_2v_1)^{R_3},$$

$$\rho = \left[\frac{\Gamma(R_1)\Gamma(R_2)\Gamma(R_1+R_2+R_3-1)}{\Gamma(R_2+R_3)\Gamma(R_1+R_2)\Gamma(R_1+R_2-1)R_3!}\right]^{1/2}, \;\; R_i = \sum_k j_k(-1)^{\delta_{ik}}$$

распадается на произведение перекрытий КС

$$< j_1u \mid j_2v \parallel jw > = \rho(-2j-1)^{1/2} < R_2u \mid R_2w >< R_1v \mid R_1w >< R_3u \mid R_3v \parallel 00 > .$$

Остановимся на вопросе о классическом пределе коэффициентов КГ в базисе КС. В случае группы $SU(2)$ коэффициенты $< j_1u \mid j_2v \parallel jw >$ при больших j_1, j_2 существенно отличны от нуля лишь в области значений j и w, определяемых классической формулой сложения моментов, $j^2_{\text{кл}} = j_1^2 + j_2^2 + 2j_1j_2\cos\theta'$, где θ – угол между векторами $\mathbf{j}_1 = < j_1u \mid \hat{\mathbf{J}} \mid j_1u >$ и $\mathbf{j}_2 = < j_2v \mid \hat{\mathbf{J}} \mid j_2v >$ [3, 4]. Для дискретной серии НП в базисе прямого произведения $\mid j_1u > \otimes \mid j_2v >$ получим

$$< \hat{\mathbf{J}}^2 >=< j_1 u \mid \hat{\mathbf{J}}^2 \mid j_1 u >< j_2 v \mid j_2 v > + < j_1 u \mid j_1 u >< j_2 v \mid \hat{\mathbf{J}}^2 \mid j_2 v > +$$

$$+2g^{ik} < j_1 u \mid \hat{J}_i \mid j_1 u >< j_2 v \mid \hat{J}_k \mid j_2 v >=$$

$$= j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(\mathbf{j_1}, \mathbf{j_2}) = j^2_{\kappa\lambda} + j_1 + j_2,$$

$$(\Delta \mathbf{J})^2 =< \hat{\mathbf{J}} >^2 - < \hat{\mathbf{J}}^2 >= -(j_1 + j_2).$$

Пространство $SU(1,1)/U(1)$ псевдоевклидово, $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = -1$. Обратим внимание на то, что для дискретной серии НП некомпактной группы $SU(1,1)$ $< \hat{\mathbf{J}} >^2$ больше, чем $< \hat{\mathbf{J}}^2 >$. При больших складываемых моментах j_1 и j_2 $\Delta \mathbf{J} = -(j_1 + j_2)^{1/2} << -(j_1 + j_2)$. В пределе $j_1, j_2 \to \infty$ получаем классическую картину:

$$< \hat{\mathbf{J}}^2 > \cong < \hat{\mathbf{J}} >^2 = j^2_{\kappa\lambda}.$$

Если $j_{\kappa\lambda}$ того же порядка, что j_1 и j_2, то $(\Delta \mathbf{J})^2 <<< \hat{\mathbf{J}} >^2$, если же результирующий момент много меньше складываемых, то в классическом пределе ему отвечает $j_{\kappa\lambda} = 0$.

Используя соотношения

$$< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >= \int < j_1 u \mid j_2 v \parallel ju >< ju \mid jm > d\mu(u),$$

$$< j_1 u \mid j_2 v \parallel ju >= \sum_m < j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >< jm \mid ju >$$

для коэффициентов КГ $< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >$ НП дискретной положительной серии получим (см. для уравнения (5))

$$< j_1 u \mid j_2 v \parallel jm >= \rho \left[\frac{\Gamma(-2j) n_1!}{\Gamma(-n_2)} \right]^{1/2} (u_1 v_2 - u_2 v_1)^{R_3} (-1)^{n_1} u_1^{n_1} u_2^{R_2 - n_1} v_2^{R_1} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{n_1} \frac{\Gamma(-R_2 + n_1 - p)\Gamma(-R_1 + p)}{\Gamma(-R_2)(n_1 - p)!\Gamma(-R_1)p!} \left(\frac{u_2 v_1}{u_1 v_2} \right)^p = \tag{10}$$

$$= \rho \frac{\Gamma(-R_2 + n_1)}{\Gamma(-R_2) n_1!} \left[\frac{\Gamma(-2j) n_1!}{\Gamma(-n_2)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times(-1)^{n_1}(u_1v_2-u_2v_1)^{R_3}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n_1-R_1 & \frac{u_2v_1}{u_1v_2} \\ R_2-n_1+1 & \end{array}\right)u_1^{n_1}u_2^{R_2-n_1}v_2^{R_1},$$

или, используя связь полиномов Якоби с гипергеометрической функцией,

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -\alpha,-\beta & y \\ \gamma & \end{array}\right)=\frac{\alpha!(\gamma-1)!}{(\gamma+\alpha-1)!}(1-y)^{\alpha}P_{\alpha}^{(\gamma-1,-\alpha+\beta)}\left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$

$$<j_1u\mid j_2v>=\rho\left[\frac{\Gamma(-n_1-n_2)n_1!}{\Gamma(-n_2)}\right]^{1/2}(-1)^{n_1}(u_1v_2-u_2v_1)^{R_3-n_1}\times$$

$$\times P_{n_1}^{(R_2-n_1,R_1-n_1)}\left(\frac{u_1v_2+u_2v_1}{u_1v_2-u_2v_1}\right)u_2^{R_2-2n_1}v_2^{R_1}. \quad (11)$$

Коэффициенты КГ для НП отрицательной серии получаются из (10) и (11) заменой n_1 на n_2 (или, что то же самое, m на $-m$).

Значительный интерес представляют неисследованные ранее тройные перекрытия, содержащие элементы базиса $\mid\theta\phi>$,

$$<j_1m_1\mid j_2m_2\mid\mid\theta\phi>=\sum_{j,m}<j_1m_1\mid j_2m_2\mid\mid jm><jm\mid\theta\phi>=$$

$$=\sum_{j,m}<j_1m_1\mid j_2m_2\mid\mid jm>Y_{jm}(\theta,\phi). \quad (12)$$

Для случая группы $SU(2)$ сумма в (12) конечна. ($<j_1m_1\mid j_2m_2\mid\mid jm>$ отличен от нуля только при j, удовлетворяющих условию $\mid j_1-j_2\mid<j<j_1+j_2$). Эти перекрытия, хотя и напоминают по структуре коэффициенты Клебша – Гордана, ими не являются, т.к. $\mid\theta\phi>$ преобразуется по приводимому квазирегулярному представлению группы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л., Наука, 1975.

[2] Bellissard J., Holtz R. J. Math. Phys., **15**, 1275 (1974).

[3] Гитман Д. М., Харчев С. М., Шелепин А. Л. Труды ФИАН, 201, 95 (1990).

[4] Смородинский Я. А., Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. УФН, **162**, N 12, 1 (1992).

[5] Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. Труды ФИАН, **218**, 3 (1994).

[6] Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. ЯФ, **56**, 247 (1993).

[7] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

Поступила в редакцию 14 июля 1994 г.