УДК 530.145

ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОЙ СТРУНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В.Д.Скаржинский

Предлагается простой метод построения вектор–потенциала для магнитной струны произвольной формы с заданным магнитным потоком.

В квантовой механике при исследовании поведения заряженных частиц в заданном внешнем магнитном поле, в отличие от классической электродинамики, необходимо знать вектор–потенциал магнитного поля. Между тем, задача нахождения вектор–потенциала по заданному магнитному полю, за исключением простейших случаев, достаточно сложна — она в некотором отношении эквивалентна задаче определения магнитного поля заданного тока. Уже в простом случае линейного кругового тока решение такой задачи выражается через эллиптические интегралы (см., например [1]). Однако между двумя этими задачами имеется и существенное различие — если в случае магнитного поля решение однозначно в силу равенства нулю дивергенции магнитного поля, то вектор–потенциал определен с точностью до калибровочного преобразования. Этим произволом можно воспользоваться при нахождении вектор–потенциала по заданному магнитному полю. Как будет показано ниже, при этом вообще не нужно решать уравнений Максвелла, а можно сразу выписать решение.

Рассмотрим задачу определения вектор–потенциала магнитной струны произвольной формы с заданным магнитным потоком Ф.

Уравнение Шредингера остается инвариантным при замене

$$\Psi \to \Psi' = \Psi \exp(i\frac{e}{\hbar c}F),$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} - i\frac{\hbar c}{e}\exp(-i\frac{e}{\hbar c}F)\nabla \exp(i\frac{e}{\hbar c}F). \qquad (1)$$

Калибровочный множитель $\exp(ieF/\hbar c)$ всегда можно записать в виде

$$\exp(ieF/\hbar c) \equiv U(x,y,z) = \frac{\alpha(x,y,z) + i\beta(x,y,z)}{\sqrt{\alpha^2(x,y,z) + \beta^2(x,y,z)}},$$

где $\alpha(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$ – некоторые функции. Для знакоопределенных дифференцируемых функций α и β преобразование (1) сводится к градиентному преобразованию вектор–потенциала и не изменяет магнитное поле.

Допустим теперь, что дифференцируемые функции α и β обращаются в нуль на некоторой линии $C: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$,

$$\alpha(x,y,z) = 0, \quad \beta(x,y,z) = 0.$$

Тогда всюду, кроме быть может линии C,

$$\mathbf{A}^C(x,y,z) \equiv -i\frac{\hbar c}{e}\,U^{-1}(x,y,z)\,\nabla U(x,y,z) = \frac{\hbar c}{e}\,\frac{-\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta}{\alpha^2+\beta^2} \tag{2}$$

Нетрудно показать, что циркуляция вектора $\mathbf{A}^C$ по любой кривой, не охватывающей линию C, обращается в нуль. Для того,чтобы подсчитать циркуляцию этого вектора по кривой, охватывающей C, разложим вектор $\mathbf{A}^C$ по степеням отклонения от некоторой произвольной точки τ на линии C,

$$\mathbf{A}^C(x,y,z) \approx \frac{\hbar c}{e}\,\frac{[(\mathbf{r}-\mathbf{r}(\tau))\times[\nabla\alpha\times\nabla\beta]]}{[\nabla\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}(\tau))]^2 + [\nabla\beta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(\tau))]^2} =$$

$$= \frac{\hbar c}{e}\,\frac{|\nabla\alpha||\nabla\beta|\sin\xi}{\rho}\,\frac{\mathbf{e}_\phi}{|\nabla\alpha|^2\cos^2\phi + |\nabla\beta|^2\cos^2(\xi-\phi)},$$

где ρ, ϕ - полярные координаты в плоскости, нормальной к кривой C, а ξ - угол между векторами $\nabla\alpha$ и $\nabla\beta$. Тогда после элементарного интегрирования получаем

$$\Phi = \oint \mathbf{A}^C d\mathbf{l} = \Phi_0,$$

где $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e}$ – квант магнитного потока. Таким образом, калибровочный член (2) соответствует магнитному полю, сосредоточенному на струне C и несущему магнитный поток Φ_0. Заменяя Φ_0 произвольным множителем Φ в формуле (4), получим вектор–потенциал для струны C, содержащей магнитный поток Φ,

$$\mathbf{A}^C(x,y,z) \equiv -i\frac{\Phi}{2\pi}\,U^{-1}(x,y,z)\,\nabla U(x,y,z) = \frac{\Phi}{2\pi}\,\frac{-\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{3}$$

В качестве простейшего примера рассмотрим случай $\alpha \equiv x, \quad \beta \equiv y$, когда линия C совпадает с осью 0z. Из выражения (7) сразу получаем потенциал Ааронова – Бома [2]

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi\rho}.$$

Более сложный пример – потенциал магнитного поля, сосредоточенного на окружности радиуса a. Выберем

$$\alpha(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - a, \quad \beta(x,y,z) = z.$$

В этом случае после простых вычислений находим в цилиндрических координатах

$$\mathbf{A}^C(x,y,z) = \frac{\Phi}{2\pi}\left[-\frac{z\mathbf{e}_\rho}{(\rho-a)^2+z^2} + \frac{(\rho-a)\mathbf{e}_z}{(\rho-a)^2+z^2}\right]. \tag{4}$$

Таким образом по заданному уравнению линии можно сразу написать выражение для вектор–потенциала сосредоточенного на ней магнитного поля. Недостатком этого метода является тот факт, что, как правило, полученный таким способом вектор–потенциал обладает ненулевой дивергенцией. В частности, для вектор–потенциала (4) она равна

$$\mathrm{div}\mathbf{A}^C(x,y,z) = -\frac{z}{\rho[(\rho-a)^2+z^2]}.$$

Однако для квантовомеханических расчетов этот недостаток не слишком существенен — нужно просто удержать член с дивергенцией в уравнении Шредингера. К тому же он вполне компенсируется простотой выражений.

Понятно, что данную кривую можно задать с помощью различных пересекающихся поверхностей $\alpha(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$. Произвол в выборе этих поверхностей отражает возможность градиентных преобразований вектор–потенциала.

Нетрудно обобщить этот метод на случай зависящего от времени электромагнитного поля, сосредоточенного на струне (при этом вихревое электрическое поле также сосредоточено на струне и охватывает линию магнитного поля). Для этого достаточно выбрать поверхности $\alpha(x,y,z,t)$ и $\beta(x,y,z,t)$ зависящими от времени. Четырехмерный вектор–потенциал

$$A_\mu = -i\frac{\Phi}{2\pi}\, U^{-1}(x,y,z,t)\,\partial_\mu U(x,y,z,t),$$

описывает движущуюся струну с магнитным потоком Φ.

Предлагаемый метод можно использовать и для нахождения вектор–потенциала произвольного заданного распределения магнитного поля $H(x,y,z)$. С этой целью необходимо представить данное распределение магнитного поля в виде суперпозиции магнитных струн с магнитным потоком $d\Phi = H(x_0,y_0,z_0)dS(x_0,y_0,z_0)$, где dS – нормальная к H элементарная площадка, и проинтегрировать выражение для вектор–потенциала

$$d\mathbf{A}^C(x,y,z) \equiv -i\frac{d\Phi}{2\pi}\, U^{-1}(x,y,z)\, \nabla U(x,y,z) = \frac{d\Phi}{2\pi}\, \frac{-\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

по dS.

В качестве простой иллюстрации найдем таким методом вектор–потенциал соленоида радиуса R с однородным магнитным полем $H = \Phi/\pi R^2$ внутри, где Φ – поток магнитного поля. Выбирая $\alpha = x - x_0$, $\beta = y - y_0$, и замечая, что $d\Phi = \Phi/\pi R^2$, $dS = \rho_0 d\rho_0 d\varphi_0$, получим

$$dA^C_\rho = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Phi}{\pi R^2}\,\frac{-\rho_0\sin(\varphi-\varphi_0)}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0,$$

$$dA^C_\varphi = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Phi}{\pi R^2}\,\frac{\rho-\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0.$$

Интегрирование по dS дает известный результат

$$A^\rho = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R^2}\,\rho\,\Theta(R-\rho) + \frac{\Phi}{2\pi R^2}\,\frac{1}{\rho}\,\Theta(\rho-R).$$

Рассмотренные примеры доказывают простоту и эффективность предлагаемого метода вычисления вектор–потенциала по заданному магнитному полю.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант N 93-02-14362).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

[2] Aharonov Y. and Bohm D., Phys.Rev., 1959, **115**, 485 (1959).

Поступила в редакцию 29 августа 1994 г.