

УДК 534.0517.9

## СПОНТАННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ ВРЕМЕН ГЕНЕРАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ ИЗ ТРЕХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Е. И. Волков

*В системе из трех диффузионно-связанных одинаковых релаксационных осцилляторов найдено детерминированное решение, демонстрирующее широкое дискретное распределение времен генерации.*

Многие задачи в химии, физике и биологии приводят к моделям связанных нелинейных осцилляторов [1 – 5]. Системы из двух диффузионно-связанных осцилляторов изучены достаточно подробно (см. [5] и ссылки в ней), а систематические исследования коллективных нестационарных режимов в системах из трех осцилляторов только начинаются [6, 7, 8]. Известные в литературе теоретические подходы ограничены либо приближением "фазовых уравнений" [9, 10], которые справедливы для слабых связей между осцилляторами, либо рассмотрением слабонелинейных осцилляторов. Однако реальные осцилляторы, например, химические [11] и биохимические [12], не удовлетворяют этим приближениям, демонстрируя релаксационный характер разветвок.

Изучение взаимодействия трех одинаковых релаксационных осцилляторов, предложенных в [13, 14] в качестве модели мембранного осциллятора, показало, что обмен по медленной переменной приводит к образованию нескольких периодических аттракторов, различающихся периодом и разностью фаз [15]. При этом релаксационность (жесткость) осциллятора является важным бифуркационным параметром, определяющим устойчивость аттракторов и структуру фазовой диаграммы. В частности, объем пространства параметров, где реализуются нетривиальные режимы и размеры их бассейнов в фазовом пространстве, как правило, резко возрастают с жесткостью индивидуального осциллятора [16].

Сосуществование различных периодических решений в среде, состоящей из одинаковых элементов, позволяет получить большую изменчивость времен генерации (интервал

между вспышками быстрой переменной релаксационного осциллятора) путем введения слабого шума в систему [15]. Шум вызывает переходы между аттракторами, приводя к многомодовым распределениям времен генерации.

В настоящем сообщении приводятся результаты численного исследования решения, которое демонстрирует дискретные времена генерации в отсутствие внешнего шума.

Рассмотрим 3 одинаковых осциллятора с Неймановскими граничными условиями. Система уравнений в безразмерной форме имеет вид [14, 15]:

$$dX_1/dt = \eta - 1,5X_1Y_1 - DX_1 - 0,5\gamma Y_1/(Y_1 + \delta) + C(X_2 - X_1),$$

$$\epsilon dY_1/dt = k + 0,5X_1Y_1 - Y_1^2 - 1,5\gamma Y_1/(Y_1 + \delta),$$

$$dX_2/dt = \eta - 1,5X_2Y_2 - DX_2 - 0,5\gamma Y_2/(Y_2 + \delta) + C(X_3 + X_1 - 2X_2),$$

$$\epsilon dY_2/dt = k + 0,5X_2Y_2 - Y_2^2 - 1,5\gamma Y_2/(Y_2 + \delta),$$

$$dX_3/dt = \eta - 1,5X_3Y_3 - DX_3 - 0,5\gamma Y_3/(Y_3 + \delta) + C(X_2 - X_3),$$

$$\epsilon dY_3/dt = k + 0,5X_3Y_3 - Y_3^2 - 1,5\gamma Y_3/(Y_3 + \delta).$$

Если значение параметра  $\gamma > k$ , то в автономной системе ( $C = 0$ ) изоклина для быстрой переменной принимает  $N$ -образный вид и в системе (1) в широкой области параметров имеется устойчивый предельный цикл, фазовый портрет и развертки которого приведены на рис. 1. Несимметричность развертки осциллятора означает, что имеется три характерных времени:  $T_1$  – время движения по медленному участку изоклины (AB – рис. 1а);  $T_2$  – время перескока (BC – рис. 1а) с медленного на быстрый участок изоклины, которое зависит от  $\epsilon$ , и  $T_3$  – время возврата по правой ветви изоклины (CD). Сумма  $T_2$  и  $T_3$  определяет длительность вспышки быстрой переменной, которая много меньше  $T_1$ . В дальнейшем все параметры фиксированы (см. подпись к рис. 1) за исключением  $\eta$  и  $C$ .

Динамика системы (1) изучалась численными методами (см. [15]) и было обнаружено, что при  $\epsilon \ll 0,1$  существуют несколько предельных циклов. В качестве исходного аттрактора рассмотрим режим, представленный на рис. 2. В работе [15] этот режим

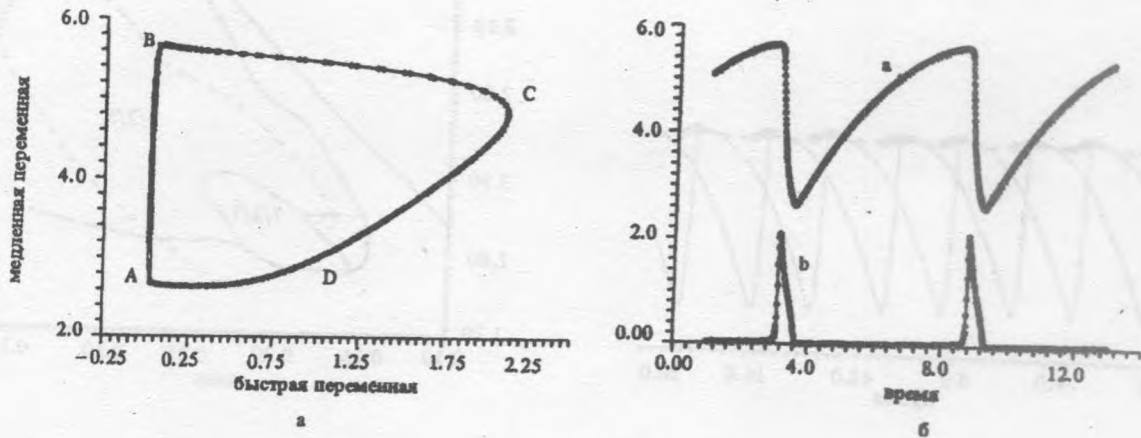


Рис. 1. Фазовый портрет и развертки (а – медленная, б – быстрая компонента) автономного предельного цикла в системе (1). Значения параметров:  $\eta = 1,835$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\delta = 0,15$ ,  $k = 0,05$ ,  $D = 0,2$ ,  $\epsilon = 0,03$ ,  $C = 0$ . Период колебаний = 5,65. Автоколебания существуют при  $\eta > \eta_{\text{биф}} = 1,7$ .

был назван "динамической ловушкой", т.к. средний осциллятор не может генерировать вспышки из-за чередующихся притоков медленной переменной от соседей. Такой режим можно назвать "стоячей волной" (СВ), рассматривая средний элемент как узел, а крайние как пучности. Границы устойчивости ловушки изображены на рис. 3, который представляет собой часть фазовой диаграммы на плоскости  $(\eta, C)$ .

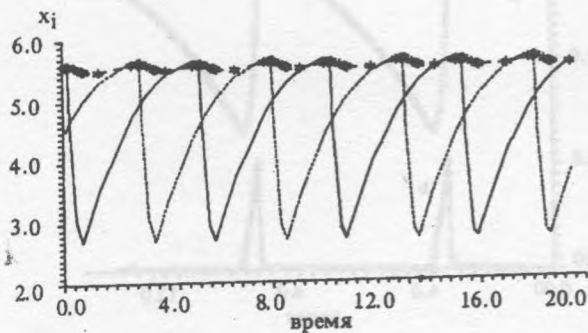


Рис. 2. Поведение медленных переменных  $x_i$  в режиме динамической ловушки:  $\eta = 1,835$ ,  $C = 0,125$ ;  $T_1 = T_3 = 5,05$ . Точки и жирные участки – развертка среднего осциллятора.

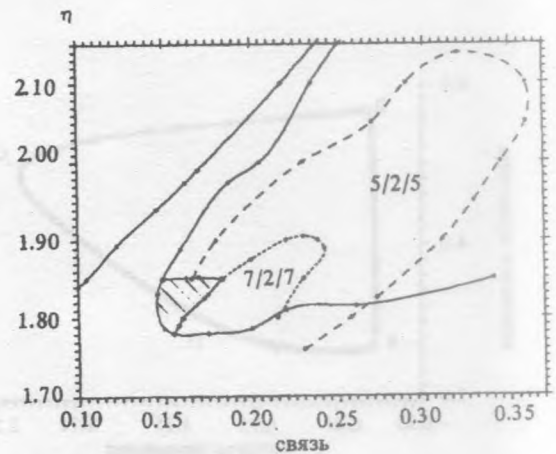


Рис. 3. Часть фазовой диаграммы системы (1). Сплошная линия – граница устойчивости динамической ловушки; пунктиры – границы режимов  $5/2/5$  и  $7/2/7$ ; заштрихована изучаемая область существования сложного квазипериодического режима, которая содержит очень узкое окно режима  $5/2/5$ .

При изучении этого режима в зависимости от интенсивности обмена выяснилось, что в интервале  $1,8 < \eta < 1,85$  динамическая ловушка переходит в сложный квазипериодический режим, в котором времена генерации всплесков в среднем осцилляторе могут изменяться в широких пределах, но разность их величин фиксирована и кратна длительности одного колебания крайнего осциллятора в режиме СВ (рис. 4). Наглядной и компактной характеристикой сложных аттракторов является "отображение последовательных периодов",  $T_{n+1} = F(T_n)$ , где  $T_n$  – интервал между последовательными всплесками. На рис. 5 представлено семейство отображений для среднего осциллятора при разных коэффициентах диффузии, но при фиксированной величине  $\eta$ . Ближе к области СВ доминируют очень большие  $T_n$ , которые (рис. 5а) обязательно чередуются с  $T_n = 9$ , образуя одномерное отображение. По мере увеличения интенсивности связи, периоды становятся короче, сохраняя одномерность и дискретность отображения (рис. 5б). Затем отображение становится двумерным (рис. 5в) и квазипериодический режим переходит в строго периодический аттрактор, обозначаемый  $5/2/5$ , в котором 5 колебаний первого и третьего осцилляторов занимают такое же время, как 2 колеба-

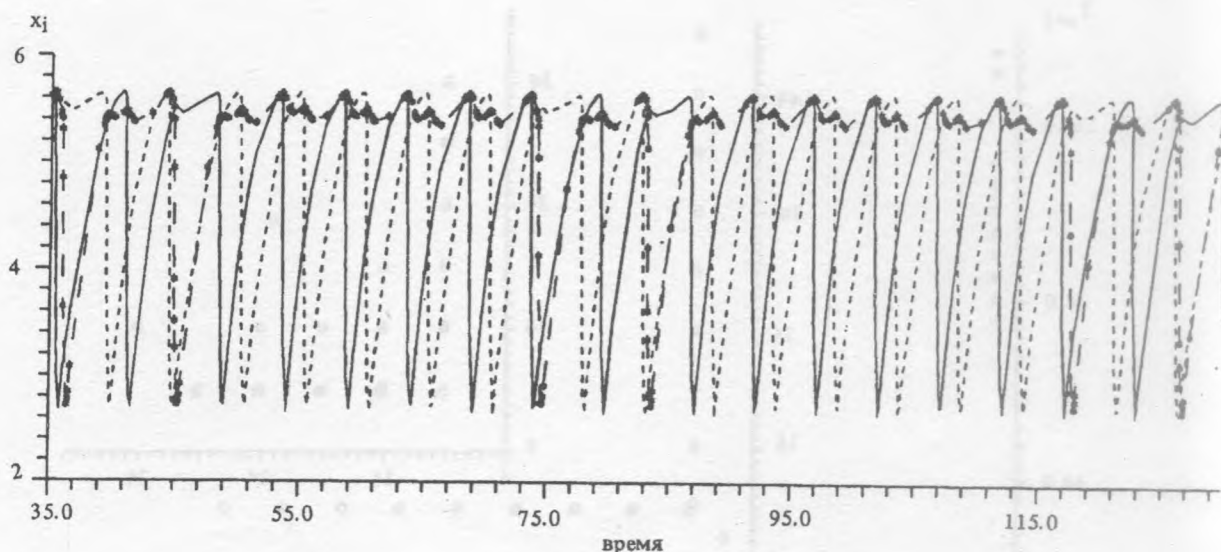


Рис. 4. Пример развертки медленных переменных  $x_i$  квазипериодического режима:  $\eta = 1,835$ ;  $C = 0,155$ . Точки и жирные участки – развертка среднего осциллятора.

ния среднего элемента. Отображения периодов крайних осцилляторов практически не зависят от величины связи, т.к. возрастает число осцилляций, а не их длительность. При меньших значениях параметра  $\eta$ , что соответствует большей асимметрии осцилляторов, в системе (1) образуются аттракторы с еще более длинными периодами:  $7/2/7$ ,  $9/2/9$  и т.д. Качественно, описанный выше режим можно рассматривать как блуждания изображающей точки между аттракторами типа  $n/2/n$  ( $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ ), вызванные неустойчивостью этих аттракторов в области, отмеченной на рис. 3.

Таким образом, обмен медленной переменной между релаксационными осцилляторами может приводить не только к резкому замедлению движения изображающей точки на медленном участке траектории, обеспечивая образование определенных длиннопериодических колебаний в среде из относительно быстрых одинаковых элементов, но и к генерации спонтанной временной изменчивости с широким и дискретным спектром периодов.

Работа выполнена в рамках проекта 94-01-00959 Российского фонда фундаментальных исследований.

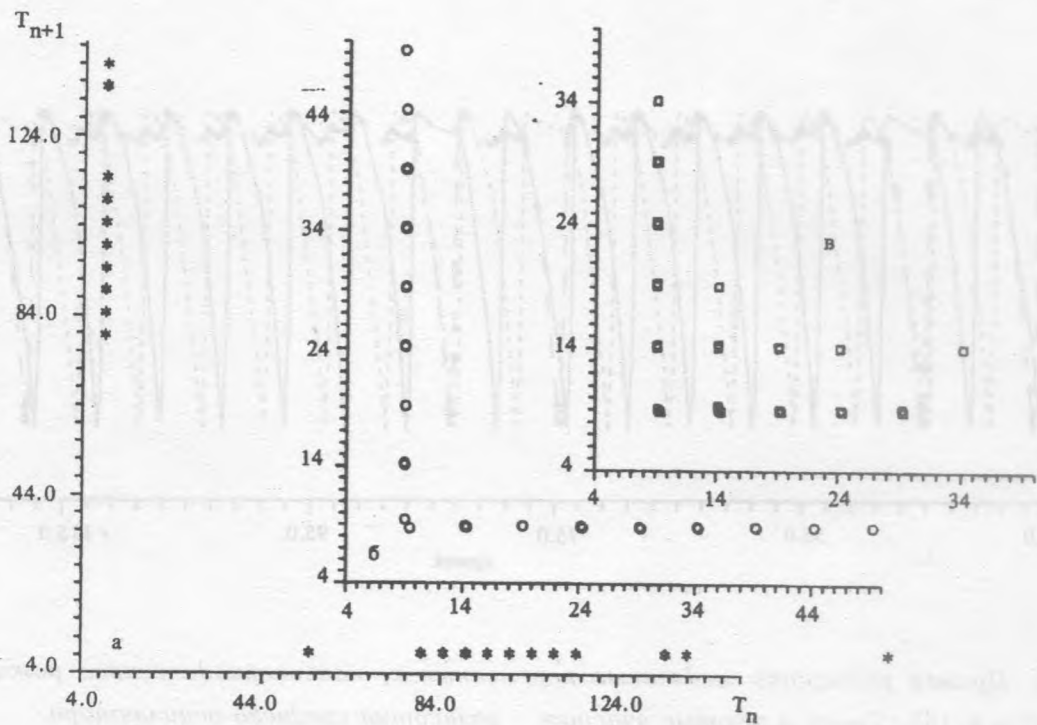


Рис. 5. Семейство отображений последовательных времен генерации для  $\eta = 1,835$  и разных коэффициентов связи:  $C = 0,148$  (а),  $C = 0,155$  (б),  $C = 0,1642$  (в).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Winfree A. T. The Geometry of Biological Time, Springer, NY, 1980.
- [2] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М., Наука, 1975.
- [3] Crowley M. F., Epstein I. R. J. Phys. Chem., **93**, 2496 (1989).
- [4] Dolnik M., Marek M. J. Phys. Chem., **92**, 2452 (1988).
- [5] Aronson D. G., Doedel E. J., Othmer H. G. Physica, **25D**, 20 (1987).
- [6] Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Phys. Rev., **47E**, 864 (1993).
- [7] Ashwin P., King G. P., Swift J. W. Nonlinearity, **3**, 585 (1990).
- [8] Ruwisch D., Bode M., Schutz P., Markus M. Phys. Lett., **186A**, 137 (1994).
- [9] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer, NY,

1984.

- [10] Daido H. *Progr. Phys.*, **77**, 622 (1987).
- [11] Showalter K., Noyes R. M., Bar-Eli K. *J. Chem. Phys.*, **69**, 2514 (1978).
- [12] Das J., Busse H.-G. *Biophys. J.*, **60**, 369 (1991).
- [13] Паламарчук Е. К. и др. *Биофизика*, **23**, 845 (1978).
- [14] Волков Е. И., Мустафин А. Т. *Изв. АН СССР, сер. биол.*, N 6, 805 (1985).
- [15] Volkov E. I., Stolyarov M. N. *Biol. Cybern.*, 71 (1994) (in press).
- [16] Volkov E. I., Stolyarov M. N. *Phys. Lett.*, **159A**, 61 (1991).

Поступила в редакцию 17 октября 1994 г.