УДК 535.32

РАСШИРЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО И МОДЕЛЬ ОБЪЕДИНЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Д. Ю. Ципенюк, В. А. Андреев

Вводится (1+4)-мерное пространство, являющееся расширением пространства Минковского. В этом расширенном пространстве строится обобщение специальной теории относительности, допускающее изменение массы покоя частиц. Используя развитый формализм, строится модель теории поля, объединяющая электромагнетизм и гравитацию.

Предложена модель, являющаяся обобщением специальной теории относительности Эйнштейна (СТО). В рамках этой модели рассматривается возможность объединения гравитации и электромагнетизма в одно единое поле. Формально обобщение СТО состоит в том, что вместо (1+3)-мерного пространства Минковского $M(T;\vec{X})$ рассматривается его (1+4)-мерное расширение.

Попытки объединения гравитации и электромагнетизма имеют большую историю. Современные подходы к данной проблеме восходят к работе Ф. Клейна [1], в которой он показал, что классическую гамильтонову механику можно представить как оптику в пространстве большего числа измерений. Затем Т. Калуца предпринял попытку обобщить теорию гравитации Эйнштейна с тем, чтобы включить в нее и электромагнетизм [2]. Он предложил рассмотреть (1+4)-мерное пространство с метрикой, зависящей от потенциалов электромагнитного поля. Идея Калуцы была развита О. Клейном [3], Г. Манделем [4] и В. Фоком [5]; построенная ими модель получила название теории Калуцы–Клейна. Было показано, что траектория заряженной частицы имеет вид геодезической линии нулевой длины в 5-мерном пространстве.

Ю. Румер в своих работах по 5-оптике [6] предложил приписать новому измерению размерность действия и считать его периодическим с периодом, равным постоянной

Планка. Отметим, что во всех их построениях масса покоя частиц считалась фиксированной величиной.

Последующее развитие многомерных теорий изложено в монографии [7]. Отдельное направление образуют многомерные конструкции в теории струн и суперструн [8].

Нами развивается другой подход к построению многомерных физических пространств.

В качестве пятой дополнительной координаты используется та величина, которая уже существует в пространстве Минковского, а именно, интервал S

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{1}$$

Эта величина сохраняется при обычных преобразованиях Лоренца в пространстве Минковского $M(T;\vec{X})$, но меняется при поворотах в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$. Таким образом, пространство Минковского $M(T;\vec{X})$ – это конус в расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$. Сохраняется же только величина

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - s^2 = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Известно, что энергия, импульс и масса свободной частицы связаны соотношением [9]

$$E^2 - c^2p_x^2 - c^2p_y^2 - c^2p_z^2 - m^2c^4 = 0, \tag{3}$$

которое служит аналогом соотношения (1) в пространстве $G'(E;\vec{P},M)$, сопряженном к пространству $G(T;\vec{X},S)$. Масса m является величиной, сопряженной к интервалу s. В данной работе мы всюду, специально этого не оговаривая, будем понимать под массой частицы m и ее массу покоя, которая является лоренцевским скаляром. Никаких других масс у нас появляться не будет. Здесь мы следуем рекомендациям обзора [10].

Таким образом, с физической точки зрения наше расширение СТО состоит в том, что теперь считаются допустимыми и такие процессы, в которых меняется масса покоя частиц. Возможность существования таких процессов обсуждается в литературе. Так, например, если фотон попадает в среду или оказывается в резонаторе или волноводе, то ему можно приписать некоторую ненулевую массу [11, 12]. Мы не будем сейчас обсуждать вопрос о том, в какой степени эту массу можно считать реальной, важно лишь то, что развиваемый нами формализм учитывает такую возможность.

Эта возможность для нас чрезвычайно важна, она позволяет связать формальную геометрическую величину – координату дополнительного (5-го) измерения, с физическим параметром – показателем преломления n, задающим величину скорости света в среде. Фактически, наше расширенное пространство $G(T, \vec{X}, S)$ есть набор обычных пространств Минковского $M(T, \vec{X})$, каждое из которых заполнено средой со своим показателем преломления n.

По этой причине близкой задачей является и разработка ковариантной модели электродинамики сплошных сред, т.е. такой модели, в которой материальные характеристики среды μ и ϵ получают естественную геометрическую интерпретацию в терминах расширенного пространства $G(T; \vec{X}, S)$.

Поскольку пространство, в котором задаются все физические объекты, пятимерно, вектор-потенциал электромагнитного поля тоже имеет пять компонент. Четыре из них, относящиеся к пространству Минковского $M(T; \vec{X})$, мы связываем с обычным электромагнитным полем, а пятую интепретируем как потенциал гравитационного поля. Таким образом, в нашей модели эти два поля объединяются в одно и возможны ситуации, когда они будут переходить друг в друга.

Примером таких процессов служат реакции превращения элементарных частиц друг в друга, протекающие с возникновением дефекта масс. Именно в этом случае и происходит переход гравитационной массы в электромагнитное излучение. Такие процессы и служат источником плоских электромагнитных волн. Отметим, что вопрос о воздействии гравитационного поля на электромагнитное излучение вновь начал активно обсуждаться в последнее время [13].

Проблем, связанных с излучением нейтрино и, вообще, частиц с полуцелым спином, мы в данной работе не касаемся.

Более подробное изложение всех этих вопросов содержится в работах авторов [14 – 17].

Вектора свободных частиц. В пространстве Минковского $M'(E; \vec{P})$ свободным частицам сопоставляется 4-компонентный вектор энергии-импульса, компоненты которого связаны соотношением (3). В зависимости от того, равна масса m частицы нулю или нет, точка, соответстующая этому вектору, лежит либо на конусе, либо на гиперболоиде в пространстве $M'(E; \vec{P})$. В расширенном пространстве $G'(E; \vec{P}, M)$ свободным частицам сопоставляется 5-компонентный вектор энергии-импульса-массы, компоненты которого связаны тем же самым соотношением (3). Только теперь величина m уже не постоянный внешний параметр, а равноправная переменная, все эти вектора изотропны и соответствующие им точки лежат на конусе (3) в пространстве $G'(E; \vec{P}, M)$.

Частицы, находящиеся во внешнем поле, описываются неизотропными векторами, лежащими на гиперболоидах (2) [16].

В пространстве Минковского все частицы делятся на два типа: массивные, характеризующиеся массой m, и безмассовые (фотоны), характеризующиеся частотой ω. В нашей модели покоящейся массивной частице сопоставляется 5-вектор энергии-импульса-массы

$$(mc, \vec{0}, mc), \tag{4}$$

а фотону, летящему в пустом пространстве со скоростью c в направлении $\vec{k}$, сопоставляется 5-вектор энергии-импульса-массы

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c}\vec{k}, 0\right). \tag{5}$$

Видно, что оба эти 5-вектора изотропны. Повороты в пространстве $G(T; \vec{X}, S)$, дополнительные к преобразованиям Лоренца, перемешивают координаты, соответствующие пространству и времени с новой координатой s. В сопряженном пространстве $G'(E; \vec{P}, M)$ такие повороты переводят энергию и импульс в массу и обратно. Приведем их явный вид. Для этого будем использовать две параметризации. Одна из них задается углами поворотов в плоскостях (TS), (XS), (YS), (ZS), первый из них является гиперболическим, а остальные три тригонометрическими.

Другая параметризация имеет непосредственный физический смысл. Известно, что фотон, попадая в среду с показателем преломления $n > 1$, начинает двигаться со скоростью $v = c/n < c$. В нашей модели такое уменьшение скорости фотона связывается с тем, что у него появляется ненулевая масса m. Величина этой массы зависит, с одной стороны, от величины угла, на который совершается поворот, и его типа, а с другой стороны, она зависит и от показателя преломления. Сравнивая получающиеся выражения, находим связь угла поворота с n. Применим эти преобразования к векторам (4), (5). При этом будем считать, что вектор $\vec{k}$ направлен по оси X.

При гиперболических поворотах в плоскости (TS) меняется энергия и масса частицы, но сохраняется ее импульс. Фотонный вектор (4) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\hbar\omega}{c}(1, 1, 0) \to \frac{\hbar\omega}{c}(\cosh\theta, 1, \sinh\theta) = \frac{\hbar\omega}{c}(n, 1, \sqrt{n^2 - 1}). \tag{6}$$

В результате такого преобразования возникает частица с массой

$$m = \frac{\hbar\omega}{c^2}\sinh\theta = \frac{\hbar\omega}{c}\sqrt{n^2 - 1}. \tag{7}$$

При том же самом повороте вектор (5) массивной частицы преобразуется следующим образом:

$$(mc, 0, mc) \to (mce^{\theta}, 0, mce^{\theta}). \tag{8}$$

При таком повороте массивная частица меняет свою массу

$$m \to me', 0 \le \theta < \infty. \tag{9}$$

Угол поворота θ и показатель преломления n связаны соотношением

$$n = \cosh\theta, e^{\theta\pm} = n \pm \sqrt{n^2 - 1}. \tag{10}$$

Это означает, что при преобразовании (8) из частицы с массой m может возникнуть частица с двумя разными массами

$$m_+ = me^{\theta+}, \; m_- = me^{\theta-}. \tag{11}$$

Таким образом, при поворотах в плоскости (TS) массы частиц, обладающих массами покоя, могут изменяться по двум разным законам (10) и (11). Одна ветвь монотонно растет, а вторая монотонно убывает. При больших n они имеют следующий характер поведения:

$$e^{\theta+} = n + \sqrt{n^2 - 1} \to 2n - \frac{1}{2n}, \text{ при } n \to \infty, \tag{12}$$

$$e^{\theta-} = n - \sqrt{n^2 - 1} \to \frac{1}{2n}, \text{ при } n \to \infty. \tag{13}$$

Характерно, что фотоны имеют только одну массовую ветвь (7).

При тригонометрических поворотах на угол ψ в плоскости (XC) сохраняется энергия, а меняются импульс и масса частиц. Фотонный вектор (4) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\hbar\omega}{c}(1, 1, 0) \to \frac{\hbar\omega}{c}(1, \cos\psi, \sin\psi) = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1, \frac{1}{n}, \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right). \tag{14}$$

При этом фотон приобретает массу

$$m = \frac{\hbar\omega}{c^2}\sin\psi = \frac{\hbar\omega\sqrt{n^2 - 1}}{nc^2}. \tag{15}$$

Вектор (5) массивной частицы при таких поворотах преобразуется по закону

$$nc(1,0,1) \to mc(1,-\sin\psi,\cos\psi) = mc\left(1,-\frac{\sqrt{n^2-1}}{n},\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Энергия частицы при таком преобразовании сохраняется, но меняется ее масса

$$m \to m\cos\psi = \frac{m}{c} \tag{17}$$

и импульс

$$0 \to -mc\sin\psi = \frac{mc}{n}\sqrt{n^2-1}. \tag{18}$$

Электромагнитно-гравитационное поле и расширенные уравнения Максвелла. Источником электромагнитного поля служит ток. В традиционной формулировке электромагнитный ток описывается 4-вектором в пространстве Минковского:

$$\tilde{\rho} = (\rho, \vec{j}), = \left(\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \ \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}. \tag{19}$$

Здесь $\rho_0(t,x,y,z)$ – плотность электрического заряда в точке (t,x,y,z), а $v_x(t,x,y,z)$, $v_y(t,x,y,z)$, $v_z(t,x,y,z)$ – локальная скорость плотности зарядов.

При переходе к расширенному пространству $G(T;\vec{X},S)$ 4-вектор тока (19) следует заменить 5-вектором $\bar{\rho}$. В соответствие с теми принципами, которые положены в основу развиваемой модели, дополнительная координата вектора $\bar{\rho}$ вводится таким образом, чтобы получающийся 5-вектор был изотропен. Поэтому получаем

$$\bar{\rho} = (\rho, \vec{j}, j_s) = \left(\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \rho_0 c\right). \tag{20}$$

Отметим, что вектор тока (20) похож на вектор энергии-импульса-массы частицы, обладающей массой покоя. Разница между ними состоит в том, что в векторе (20) вместо массы покоя m_0 стоит локальная плотность заряда ρ_0. В расширенном пространстве $G(T;\vec{X},S)$ ток (20) порождает поле, которое описывается 5-вектор-потенциалом

$$(\varphi, \vec{A}, A_s) = (A_t, A_x, A_y; A_z, A_s). \tag{21}$$

Потенциалы (21) и ток (20) связаны уравнениями

$$\Diamond A_t = -4\pi\rho, \tag{22}$$

$$\Diamond \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{23}$$

$$\diamond A_s = -\frac{4\pi}{c} j_s. \tag{24}$$

Здесь

$$\diamond = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{25}$$

Поле, соответствующее потенциалу (21), содержит помимо обычных электрических и магнитных компонент еще и дополнительные компоненты, отражающие тот факт, что в процессе взаимодействия может меняться масса частиц. В нашей модели эти компоненты ассоциируются с гравитационным полем. На эту мысль наводит тот факт, что потенциал j_s является лоренцевским скаляром и, если ограничиться преобразованиями Лоренца, система (22) – (24) разбивается на две не связанные друг с другом части: систему (22), (23) и уравнение (24). При отсутствии зависимости от дополнительной координаты s система (22), (23) совпадает с системой уравнений на потенциалы электромагнитного поля, а уравнение (24) представляется естественным отождествить с уравнением для скалярного потенциала ϕ гравитационного поля [18, 19]

$$\Delta\phi = 4\pi\gamma M(x, y, z). \tag{26}$$

Возможность такого отождествления основана еще и на том, что в правых частях уравнений (24), (26) стоит одна и та же плотность распределения масс покоя. Потенциалы j_s и ϕ связаны соотношением

$$A_s = -\frac{e}{\gamma}\phi. \tag{27}$$

Итак, если масса покоя частиц не меняется и физические величины не зависят от дополнительной переменной s, то электромагнитное и гравитационное поля существуют независимо друг от друга. Если же масса покоя становится переменной и возникает зависимость от s, то они объединяются в одно единое поле.

По потенциалам $(A_t, A_x, A_y, A_z, A_s)$ можно построить тензор напряжений этого поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i};\ i, k = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{28}$$

$$||F_{ik}|| = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z & -Q \\ E_x & 0 & -H_z & H_y & -G_x \\ E_y & H_z & 0 & -H_x & -G_y \\ E_z & -H_y & H_x & 0 & -G_z \\ Q & G_x & G_y & G_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

Здесь в тензор напряжений вошли новые поля Q и $\vec{G}$

$$Q = F_{40} = \frac{\partial A_4}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_4} = \frac{\partial A_s}{c\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \qquad (30)$$

$$G_x = F_{41} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{\partial A_s}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial s}, \qquad (31)$$

$$G_y = F_{42} = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} = \frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s},$$

$$G_z = F_{43} = \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} = \frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s}.$$

Систему уравнений, которой удовлетворяют напряженности F_{ik}, мы будем называть расширенной системой Максвелла. Как и в обычном случае она состоит из двух частей. Уравнения первого типа не зависят от выбора калибровки и не включают в себя токи, они связывают между собой только напряженности. Имеется 10 таких уравнений, их можно объединить в три векторных уравнения и одно скалярное. Первая пара уравнений Максвелла сохраняет свой вид:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \qquad (32)$$

Два других уравнения включают в себя новые поля $Q, \vec{G}$ и производную по новой переменной s:

$$\operatorname{rot} \vec{G} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial s} = 0, \ \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \operatorname{grad} Q = 0. \qquad (33)$$

Векторные операторы div, rot, grad имеют обычный трехмерный вид.

Уравнения второго типа связывают напряженности с источниками, их вид зависит от выбора калибровки. Если выбрано условие калибровки Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_t}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_s}{\partial s} = 0, \qquad (34)$$

то они принимают вид

$$\operatorname{div}\vec{E} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 4\pi\rho, \tag{35}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{G}}{\partial s} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{36}$$

$$\operatorname{div}\vec{G} + \frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial t} = 4\pi j_4. \tag{37}$$

Взаимодействия и сила Ньютона–Лоренца. В качестве примера взаимодействия двух объектов рассмотрим систему, состоящую из электромагнитно-гравитационного поля и массивной заряженной частицы, движущейся в этом поле. Такой системе мы по аналогии с обычной электродинамикой [9] сопоставляем изотропный 5-вектор

$$\tilde{P} = \left(\frac{1}{c}(E - e\varphi - m_p\phi), (\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}), (M - m_f)\right). \tag{38}$$

Здесь M – масса системы частица+поле, а m_f – масса поля. E – энергия системы частица+поле, а $\vec{P}$ – ее импульс; m_p – масса частицы, а e – ее заряд.

Условие изотропности этого вектора приводит к уравнению Гамильтона–Якоби для частицы во внешнем поле. Покажем это.

Лагранжиан массивной заряженной частицы, находящейся во внешнем электромагнитно-гравитационном поле, имеет вид

$$L = -m_pc^2\sqrt{1-\beta^2} + m_fcv_s - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v} + A_sv_s) - m\phi. \tag{39}$$

По этому лагранжиану можно построить гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{4} v_i\frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\varphi + m_p\phi \tag{40}$$

и обобщенные импульсы $P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$.

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A} = \frac{m_p\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{41}$$

$$P_s = p_s + \frac{e}{c}A_s = m_pc + \frac{e}{c}A_s = Mc. \tag{42}$$

С помощью прямой подстановки можно проверить, что величины, входящие в формулы (40) – (42), удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{c^2}(H - e\varphi - m_p\phi)^2 - \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \left(Mc - \frac{e}{c}A_s\right)^2 = 0. \tag{43}$$

Если теперь учесть, что гамильтониан H соответствует энергии системы, а потенциал A_s пропорционален массе поля $\left(\frac{e}{c^2}A_s = m_f\right)$, то уравнение (43) принимает вид условия изотропности вектора (38) в расширенном пространстве $G(T, \vec{X}, S)$. При этом следует учитывать, что в обычной электродинамике масса поля равна нулю ($m_f = 0$), а масса частицы m_p не меняется. Если же вместо вектора (38) рассмотреть два отдельных 5-вектора, отвечающих взаимодействующим полю и частице и образующих его, то ни один из них сам по себе не будет изотропным.

Из равенства (43) можно получить и уравнение Гамильтона–Якоби для частицы в электромагнитном поле. Это уравнение пишется на функцию действия

$$S = S(t, x, y, z, s).$$

Из свойств этой функции следует, что

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t},\; P_i = \frac{\partial S}{\partial x_i},\; i = 1, ..., 4. \tag{44}$$

Теперь, подставляя (44) в (43), получим уравнение в частных производных на функцию $S(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 - \left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x_4} - \frac{e}{c}A_4\right)^2 = 0. \tag{45}$$

Это и есть уравнение Гамильтона–Якоби в расширенном пространстве $G(T, \vec{X}, S)$ для частицы во внешнем поле.

На эту частицу со стороны поля действует сила, являющаяся обобщением электромагнитной силы Лоренца и гравитационной силы Ньютона. Уравнения движения частицы, находящейся под действием такой силы Ньютона–Лоренца, имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] + \gamma\frac{m}{e}\operatorname{grad} A_s, \tag{46}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{e}{c}Q + \frac{e}{c^2}(\vec{v}, \vec{G}) + \gamma\frac{m}{e}\frac{\partial A_s}{\partial s}. \tag{47}$$

Основным результатом данной работы является построение схемы модели, обобщающей специальную теорию относительности и позволяющей рассмотреть с единой точки зрения электромагнетизм и ньютоновскую теорию гравитации. Формально обобщение состоит в переходе от (1+3)-мерного пространства Минковского $M(T, \vec{X})$ к (1+4)-мерному расширенному пространству $G(T, \vec{X}, S)$. Новая дополнительная координата S позволяет наряду с пустым пространством Минковского рассматривать и пространства, заполненные той или иной средой. Свойства среды характеризуются одним параметром – показателем преломления n. Этот параметр определяет скорость света в данной среде. Переход частицы из пространства с одним n в пространство с другим n сопровождается изменением массы этой частицы. Такая связь массы со свойствами пространства-времени позволяет естественным образом объединить гравитационное и электромагнитное поля в одно поле. Свободным частицам в пространстве $G(T, \vec{X}, S)$ сопоставляются изотропные вектора, а взаимодействующим – неизотропные. Этот принцип позволяет при рассмотрении составных объектов регулярным образом вводить взаимодействие между его отдельными частями.

Важнейшей задачей при таком подходе является установление связи между конкретными силовыми полями и геометрией расширенного пространства. Не все поля и среды удается описать в терминах показателя преломления n. Свободным частицам сопоставляются плоские волны, взаимодействие должно приводить к их локализации. Эти проблемы мы предполагаем рассмотреть в последующих работах.

Авторы благодарны В. Г. Михалевичу за постоянное внимание и большую поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Klein F. Zeits. Math. Phys., **375**, (1901) (перевод см. в сборнике "Вариационные принципы механики", М., Физматгиз, 1960).

[2] Kaluza Th. Sitz. Preuss. Akad., **966**, (1921) (перевод см. в сборнике "Альберт Эйнштейн и теория гравитации", М., Мир, 1979).

[3] Klein O. Zeits. Phys., **37**, 895 (1926).

[4] Mandel H. Zeits. Phys., **39**, 136 (1926).

[5] Fock V. Zeits. Phys., **39**, 226 (1926).

[6] Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике, М., Гостехиздат, 1956.

[7] Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий, М., МГУ, 1987.

[8] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн, **1**, **2**, М., Мир, 1990.

[9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, М., Наука, 1967.

[10] Окунь Л. Б. УФН, **158**, 511 (1989).

[11] Гинзбург В. Л. Теоретическапя физика и астрофизика, М., Наука, 1981.

[12] Ривлин Л. А. УФН, **167**, 309 (1997).

[13] Окунь Л. Б. УФН, **169**, 1141 (1999).

[14] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 5, М., 1999.

[15] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 9, М., 1999.

[16] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Препринт ИОФАН N 2, М., 2000.

[17] Ципенюк Д. Ю., Андреев В. А. Электронный журнал "Исследовано в России", **60**, (1999). http://zhurnal. mipt. rssi. ru/articles/1990/060/ pdf

[18] Паули В. Теория относительности. М., Наука, 1983.

[19] Фок В. А. Теория пространства времени и тяготения. М., Физматлит, 1961.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 30 марта 2000 г.