УДК 530.145

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ЭЙРИ

А. С. Бруев

***Найдены новые асимптотические разложения функций Эйри, характеризующиеся отсутствием экспоненциально малых членов.***

Асимптотические разложения функций Эйри представляют интерес для многих физических приложений, например, при выводе формул связи для ВКБ решений уравнения Шредингера [1]. Известные асимптотические разложения функций Эйри [2] относятся к ватсоновскому типу [3], когда в асимптотическом разложении учитываются члены, малые по сравнению с основными, экспоненциально большими членами.

В данной работе получены новые асимптотические разложения функций Эйри, удовлетворяющие общему определению асимптотического разложения, данному Пуанкаре [4]. В них отсутствуют экспоненциально-малые члены и, кроме того, положение линий Стокса отличается от известного случая [2].

Для вывода асимптотических разложений функций Эйри воспользуемся формулами, выражающими их через известные контурные интегралы

$$u_j(z) = \int\limits_{\Gamma_j} dt \exp(zt - t^3/3),$$

где $j = 1-3$, а пути интегрирования $\Gamma_j$ при $|\, t \,| \to \infty$ имеют асимптотические направления, определяемые условием $\mathrm{Re}\, t^3 > 0$ [5]. Для упрощения выкладок будем считать, что $\Gamma_j$ представляют собой отрезки прямых, проходящие через начало координат. В этом случае получаем: $u_j(z) = \epsilon_{jkl}[J_k(z) - J_l(z)]$, где $\epsilon_{jkl}$ – символ Леви – Чевита, а интегралы $J_k(z)$ имеют вид

$$J_k(z) = \int\limits_0^{\infty \exp(i\Gamma_k)} dt \exp(zt - t^3/3),$$

причем формулы для $\Gamma_k$ можно записать следующим образом: $\Gamma_k = -\pi/6 + (k-1)2\pi/3 + \alpha_k$, а $\alpha_k$ таково, что $\pi/3 \geq \alpha_k \geq 0$. Отметим, что асимптотические разложения интегралов, подобных $J_k(z)$, уже рассматривались в литературе [1]. Однако полученные ранее асимптотические разложения для $J_k(z)$ содержали малые степенные члены и, следовательно, относились к ватсоновскому типу.

С помощью замены переменной $t = \sqrt{z} + \sqrt{v}\exp(i\Gamma_k)$ для интеграла $J_k(z)$ находим

$$J_k(z) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\exp(i\Gamma_k)\int_0^{\infty} dv\,\exp[-\sqrt{z}v\exp(2i\Gamma_k)]g_k(v), \tag{1}$$

где $g_k(v) = v^{-1/2}\exp[-\frac{1}{3}\exp(3i\Gamma_k)v^{3/2}]$. В показателе экспоненты в (1) введем множитель $\exp(2\pi i N_k)$, где $N_k = 0, \pm1, \pm2....$ Замечая, что функция $g_k(v)$ в (1) удовлетворяет условиям обобщенной леммы Ватсона [5], разложим в выражении для $g_k(v)$ экспоненту в степенной ряд и поменяем местами операции интегрирования и суммирования. Вычисляя возникающие интегралы, при $-\pi - 4\Gamma_k - 4\pi N_k < \arg z < \pi - 4\Gamma_k - 4\pi N_k$ имеем

$$J_k(z) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\left[(-1)^{N_k}\frac{1}{z^{1/4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)}z^{-3n/2} - \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2+3n)}{3^{2n}\Gamma(2+2n)}z^{-3n/2}\right],$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция. Аналогичным образом, используя замену переменной $t = -\sqrt{z} + \sqrt{v}\exp(i\Gamma_k)$, получаем

$$J_k(z) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\exp(i\Gamma_k)\int_0^{\infty} dv\,\exp[-\sqrt{z}v\exp(2i\Gamma_k + i\pi)]g_k(v),$$

где функция $g_k(v)$ такая же, как в (1). Преобразуя полученное выражение рассмотренным выше способом, при $-3\pi - 4\Gamma_k - 4\pi N_k < \arg z < -\pi - 4\Gamma_k - 4\pi N_k$ находим

$$J_k(z) = \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\Bigg[(-1)^{N_k}(-i)\tfrac{1}{z^{1/4}}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)}z^{-3n/2} - \\ - \tfrac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n\Gamma(2+3n)}{3^{2n}\Gamma(2+2n)}z^{-3n/2}\Bigg].$$

Для вывода асимптотических разложений функций Эйри $Ai(z)$ и $Bi(z)$ воспользуемся соотношением

---

[1]См., например, работу [6] и имеющиеся там ссылки.

$$sBi(z) + itAi(z) = \frac{1}{2\pi}[2sJ_1(z) + (t-s)J_2(z) - (t+s)J_3(z)],$$

где $s$ и $t$ – произвольные константы. Для функции $Ai(z)$, используя полученные выражения для $J_k(z)$, находим

$$Ai(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)} z^{-3n/2}, & -\pi < \arg z < \pi; \\ \frac{\pm i}{2\pi z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)} z^{-3n/2}, & -\pi \pm 2\pi < \arg z < \pi \pm 2\pi. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что указанные в (2) интервалы изменения $\arg z$ соответствуют таким значениям $\Gamma_k$, когда первые имеют максимально возможные значения. Из разложений (2) видно, что линии $\arg z = \pm\pi, \pm 3\pi$ разделяют области, в которых справедливы различные асимптотические разложения функции $Ai(z)$ и, следовательно, они являются линиями Стокса. Непосредственно на линиях Стокса асимптотические разложения функции $Ai(z)$ можно получить с помощью соотношения связи [5]

$$Ai(-x) = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) Ai\left[x \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\right] + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) Ai\left[x \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)\right].$$

В частности, при $\arg z = \pm\pi$ имеем

$$Ai[x\exp(\pm i\pi)] = \frac{1}{2\pi x^{1/4}} \left[\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(-\frac{2}{3} i x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n) x^{3n/2}} + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{2}{3} i x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n) x^{3n/2}}\right]. \tag{3}$$

Аналогичным образом, для комбинаций $Bi(z) \pm i\,Ai(z)$ находим

$$Bi(z) \pm i\,Ai(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n) z^{3n/2}}, & -\pi \mp \frac{2\pi}{3} < \arg z < \pi \mp \frac{2\pi}{3}; \\ \frac{\pm i}{\pi z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n) z^{3n/2}}, & -\pi \pm \frac{4\pi}{3} < \arg z < \pi \pm \frac{4\pi}{3}. \end{cases} \tag{4}$$

Из разложений (4) видно, что для комбинации $Bi(z) + i\,Ai(z)$ линиями Стокса являются линии $\arg z = -5\pi/3, \pi/3, 7\pi/3$, а для комбинации $Bi(z) - i\,Ai(z)$ – линии $\arg z = -7\pi/3, -\pi/3, 5\pi/3$. Аналогично предыдущему, на линиях Стокса асимптотические разложения получаем с помощью соотношения связи [5]

$$Bi(z) \pm i\,Ai(z) = 2\exp\left(\pm\frac{\pi i}{6}\right) Ai\left[z\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{3}\right)\right].$$

В частности,

$$Bi\left[x\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right)\right] \pm i\,Ai\left[x\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right)\right] = 2\exp\left(\pm\frac{\pi i}{6}\right) Ai[x\exp(\pm i\pi)],$$

где разложение для функции $Ai[x\exp(\pm\pi i)]$ определяется формулой (3). Приведем для справок асимптотические разложения комбинаций $sBi(z) + itAi(z)$, где $s = 0, \pm t$:

$$sBi(z) + itAi(z) = \begin{cases} \frac{s}{\pi z^{1/4}}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)z^{3n/2}}, & -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}; \\ \frac{i(s\pm t)}{2\pi z^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)}z^{3n/2}, & -\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}; \\ \frac{(s\mp t)}{2\pi z^{1/4}}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)z^{3n/2}}, & -\frac{\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}; \end{cases}$$

На линиях Стокса асимптотические разложения получаем с помощью соответствующих формул связи. В частности,

$$sBi\left[x\exp\left(\pm\frac{i\pi}{3}\right)\right] + itAi\left[x\exp\left(\pm\frac{i\pi}{3}\right)\right] =$$
$$\frac{(s\pm t)}{2\pi x^{1/4}}\exp\left(\pm\frac{5\pi i}{12}\right)\exp\left(\mp\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm i)^n\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)x^{3n/2}} +$$
$$+\frac{s}{\pi x^{1/4}}\exp\left(\mp\frac{i\pi}{12}\right)\exp\left(\pm\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mp i)^n\Gamma(1/2+3n)}{3^{2n}\Gamma(1+2n)x^{3n/2}};$$

$$sBi[x\exp(\pm i\pi)] + itAi[x\exp(\pm i\pi)] =$$
$$\frac{(s-t)}{2\pi x^{1/4}}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(-\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\Gamma(1/2+3n}{3^{2n}\Gamma(1+2n)x^{3n/2}} +$$
$$+\frac{s+t}{2\pi x^{1/4}}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n\Gamma(1/2+3n}{3^{2n}\Gamma(1+2n)x^{3n/2}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М., Квантовая механика, М., Наука, 1974.

[2] Справочник по специальным функциям, под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган, М., Наука, 1979.

[3] W a t s o n G.N., Phil. Trans. Roy. Soc. (London) **A211**, 279 (1911).

[4] P o i n c a r e H., Acta Math., **8**, 295 (1886).

[5] Д ж е ф ф р и с Г., С в и р л с Б., Методы математической физики, т. 3, М., Мир, 1970.

[6] B a k h o o m N.G., Proc. Lond. Math. Soc. (2), **35**, 83 (1933).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 16 декабря 1992 г.