УДК 530.145

О ФОРМУЛАХ СВЯЗИ ДЛЯ МЕТОДА ВКБ

А. С. Бруев

Дан новый вывод формул связи для ВКБ решений уравнения Шредингера на действительной оси. Найдены формулы связи для ВКБ решений на линиях уровня.

Для метода ВКБ [1] центральной является проблема связи ВКБ решений уравнения Шредингера (УШ) при переходе через классическую точку поворота. В данной работе формулы связи получены с помощью новых асимптотических разложений решений уравнения Эйри, найденных в работе [2]. Соответственно отметим, что формулы связи зависят от вида асимптотических разложений функций Эйри, и, в частности, от того учитываются или нет в этих разложениях экспоненциально малые члены.

Пусть вблизи некоторой точки x_1 потенциал $U(x)$ в одномерном УШ[1] можно представить в виде $U(x) = U_0 + U_1(x - x_1)$, где $U_0, U_1 > 0$. Тогда общее решение УШ вблизи x_1 выражается через линейную комбинацию функций Эйри $Ai(z_1)$ и $Bi(z_1)$, где $z_1 = U_1^{-2/3}[U_0 + U_1(x - x_1) - E]$, а энергия E является произвольным комплексным числом.[2]

Формулы связи для ВКБ решений УШ мы получим, рассматривая эти решения вблизи точки x_1 при предельном переходе $| E | \to \infty$ по различным направлениям в комплексной плоскости с последующим аналитическим продолжением в области с произвольными значениями потенциала. Такой метод отличается от традиционного рассмотрения, когда ВКБ решения сшивают с точными решениями вблизи точки поворота, где $E \sim U_0$[1].

Легко проверить, что первые члены асимптотических разложений функций Эйри, найденных в работе [2], с точностью до постоянных коэффициентов переходят в ВКБ решения УШ для значений импульса $p = [E - U_0 - U_1(x - x_1)]^{1/2}$, т.е. вблизи точки

[1] В этом случае классически разрешенная область расположена слева от точки поворота.

[2] Мы используем систему единиц, в которой $2m = \hbar = 1$.

x_1 при $|E| \to \infty$. Однако сопоставление между ВКБ рещениями УШ и первыми членами асимптотических разложений функций Эйри возможно только в том случае, если заранее известно поведение решения УШ вблизи точки поворота.

Пусть, например, поведение интересующего нас решения УШ вблизи точки x_1 описывается функцией $Ai(z_1)$. Тогда, используя первые члены асимптотических разложений функции $Ai(z_1)$ [2] и рассмотрев предел $|E| \to \infty$ для решения УШ по направлениям $\arg E = 0, \pm\pi$, получаем следующее соответствие между ВКБ решениями УШ на действительной оси при действительных значениях энергии

$$(-p^2)^{-1/4}\exp\left[-\int\limits_{x_1}^{x}(-p^2)^{1/2}dx\right] \Longleftrightarrow$$
$$p^{-1/2}\left[\exp\left(-\tfrac{i\pi}{4}\right)\exp\left(i\int\limits_{x}^{x_1}pdx\right)+\exp\left(\tfrac{i\pi}{4}\right)\exp\left(-i\int\limits_{x}^{x_1}pdx\right)\right]. \quad (1)$$

Формула (10), аналитически продолженная в области с произвольным значением потенциала $U(x)$, дает формулу связи для ВКБ решений УШ.

Аналогичным образом, для случая, когда поведение интересующего нас решения УШ вблизи точки x_1 описывается функцией $Bi(z_1)$, находим

$$(-p^2)^{-1/4}\exp\left[\int\limits_{x_1}^{x}(-p^2)^{1/2}dx\right] \Longleftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}\,p^{-1/2}\left[\exp\left(\tfrac{i\pi}{4}\right)\exp\left(i\int\limits_{x}^{x_1}pdx\right)+\exp\left(-\tfrac{i\pi}{4}\right)\exp\left(-i\int\limits_{x}^{x_1}pdx\right)\right]. \quad (2)$$

Наконец, для случая, когда вблизи x_1 решение УШ выбрано в виде $Bi(Z_1) \pm iAi(z_1)$, возникает отличная от приведенных формул связи

$$(-p^2)^{-1/4}\exp\left[\int\limits_{x_1}^{x}(-p^2)^{1/2}dx\right] \Longleftrightarrow p^{-1/2}\exp\left(\mp\frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(\mp i\int\limits_{x}^{x_1}pdx\right). \quad (3)$$

Вопрос о направлении в комплексной плоскости x, в котором можно применять формулы связи для ВКБ решений УШ является традиционно трудным для метода ВКБ [3, 4]. Даже в сравнительно недавних работах [5], посвященным приложениям метода ВКБ, отмечается необходимость дальнейшего его изучения. Формулы связи (1) – (3) являются обратимыми. Однако при их выводе мы задавали поведение решения УШ вблизи точки поворота. На практике частное решение УШ обычно выбирают в соответствии с граничными условиями. В этом случае нужно вблизи точки поворота по известному частному ВКБ решению УШ определить соответствующее частное решение уравнения Эйри.

Пусть, например, частное ВКБ решение УШ в классически разрешенной области, расположенной слева от точки поворота, пропорционально комбинации

$$c_+ p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) + c_- p^{-1/2} \exp\left(-i \int\limits_x^{x_1} p dx \right), \tag{4}$$

где $p = \sqrt{E - U(x)}$, x_1 – координата точки поворота, а $c_\pm$ – произвольные постоянные. Пользуясь найденными в работе [2] асимптотическими разложениями функций Эйри, получаем следующее соответствие при $| E | \to \infty$, $\arg E = 0$

$$\begin{aligned} c_+ p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) + c_- p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) \to \\ \pi \left[c_+ \exp\left(-\tfrac{i\pi}{4} \right) + c_- \exp\left(\tfrac{i\pi}{4} \right) \right] Bi(z_1) + \\ + \pi \left[c_+ \exp\left(-\tfrac{i\pi}{4} \right) - c_- \exp\left(\tfrac{i\pi}{4} \right) \right] iAi(z_1), \end{aligned} \tag{5}$$

откуда следует односторонняя формула связи для ВКБ решений УШ на действительной оси:

$$\begin{aligned} c_+ p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) + c_- p^{-1/2} \exp\left(-i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) \to \\ \left[c_+ \exp\left(-\tfrac{i\pi}{4} \right) + c_- \exp\left(\tfrac{i\pi}{4} \right) \right] (-p^2)^{-1/2} \exp\left[\int\limits_{x_1}^{x} (-p^2)^{1/2} dx \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогичным образом, рассмотрим частное ВКБ решение УШ в классически запрещенной области, расположенной справа от точки поворота, пропорциональное $(-p^2)^{-1/4} \times \exp\left[- \int\limits_{x_1}^{x} (-p^2)^{1/2} dx \right]$. В этом случае имеем следующее соответствие при $| E | \to \infty$, $\arg E \pm \pi$: $(-p^2)^{-1/4} \exp\left[- \int\limits_{x_1}^{x} (-p^2)^{1/2} dx \right] \to 2\pi Ai(z_1)$, следовательно односторонняя формула связи ВКБ решений УШ на действительной оси имеет вид

$$\begin{aligned} (-p^2)^{-1/4} \exp\left[- \int\limits_{x_1}^{x} (-p^2)^{1/2} dx \right] \to \exp\left(\tfrac{i\pi}{4} \right) p^{-1/2} \exp\left(-i \int\limits_x^{x_1} p dx \right) + \\ + \exp\left(-\tfrac{i\pi}{4} \right) p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Следует отметить, что если частное ВКБ решение УШ в классически запрещенной области пропорционально $(-p^2)^{-1/4} \exp\left[\int\limits_{x_1}^{x} (-p^2)^{1/2} dx\right]$, то однозначное сопоставление невозможно, поскольку при этом возникает комбинация $\pi[Bi(z_1) + itAi(z_1)]$, содержащая произвольную постоянную t.

Односторонние формулы связи ВКБ решений УШ (6) и (7) совпадают с известными, однако способ вывода и объяснение их одностороннего характера отличаются от традиционных [1].

Используя описанный выше метод, можно получить формулы связи для ВКБ функций по любым направлениям в комплексной плоскости, проходящим через точку поворота. Ниже мы получим формулы связи на линиях уровня, где ВКБ решения имеют осциллирующий характер. Использование таких формул связи позволяет повысить точность ВКБ приближения и, в частности, описать эффект надбарьерного отражения [6].

Пусть частное ВКБ решение УШ в классически разрешенной области, расположенной слева от точки поворота, на действительной оси пропорционально комбинации (4). Тогда при $|E| \to \infty, \arg E = 0$ имеем соответствие (5), которое приводит к следующей формуле связи:

$$\begin{gathered} c_+ p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx\right) + c_- p^{-1/2} \exp\left(-i \int\limits_x^{x_1} p dx\right) \to \\ c_+ (-p^2)^{-1/4} \exp\left(i \tfrac{\pi}{4}\right) \exp\left[-\int\limits_{x_1}^{z_1^{(+)}} (-p^2)^{1/2} dz_1^{(+)}\right] + \\ + \left[c_+ (-p^2)^{-1/4} \exp\left(-i \tfrac{\pi}{4}\right) + c_- (-p^2)^{-1/4} \exp\left(i \tfrac{\pi}{4}\right)\right] \exp\left[\int\limits_{x_1}^{z_1^{(+)}} (-p^2)^{1/2} dz_1^{(+)}\right], \end{gathered} \tag{8}$$

где $z_1^{(+)}$ – координата вдоль линии уровня, выходящей из точки поворота x_1 под углом $\pi/3$ к действительной оси. Аналогичным образом находим

$$\begin{gathered} c_+ p^{-1/2} \exp\left(i \int\limits_x^{x_1} p dx\right) + c_- p^{-1/2} \exp\left(-i \int\limits_x^{x_1} p dx\right) \to \\ c_- (-p^2)^{-1/4} \exp\left(\tfrac{i\pi}{4}\right) \exp\left[-\int\limits_{x_1}^{z_1^{(-)}} (-p^2)^{1/2} dz_1^{(-)}\right] + \\ + \left[c_+ (-p^2)^{-1/4} \exp\left(\tfrac{i\pi}{4}\right) + c_- (-p^2)^{-1/4} \exp\left(\tfrac{i\pi}{4}\right)\right] \exp\left[\int\limits_{x_1}^{z_1^{(-)}} (-p^2)^{1/2} dz_1^{(-)}\right], \end{gathered} \tag{9}$$

где $z_1^{(-)}$ – координата вдоль линии уровня, выходящей из точки поворота под углом $-\pi/3$ к действительной оси. Отметим, что непосредственным расчетом можно убедиться в том, что формулы связи (8) и (9), в отличие от формул связи (6) и (7), имеют обратимый характер.

Отметим, что с помощью асимптотических разложений функций Эйри, зависящих от аргумента $z' = z\exp(\pm i\pi)$ может быть рассмотрен случай, когда классически разрешенная область расположена справа от точки поворота. Опуская выкладки отметим, что возникающие при этом формулы связи ВКБ решений УШ на действительной оси совпадают с формулами (1) – (7), если в последних поменять пределы интегрирования. Формулы связи решений УШ на линиях уровня имеют вид, аналогичный формулам (8) и (9), если в последних, наряду с заменой пределов интегрирования, произвести замену $z_1^{(\pm)}$ на $\tilde{z}_1^{(\mp)}$, где $\tilde{z}_1^{(\mp)}$ – координаты вдоль линий уровня, выходящих из точки поворота x_1 под углами $\mp 2\pi/3$ к действительной оси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, М., Наука, 1974.

[2] Бруев А. С. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 1, 2, 44 (1993).

[3] Fröman N., Fröman P. O. JWKB Approximation, Amsterdam, N.-H. Publ. Comp., 1965.

[4] Berry M., Mount K. Rep. Progr. Phys., **35**, 315 (1972).

[5] Shepard H. K. Phys. Rev. D, **27**, 1288 (1983).

[6] Покровский В. Л., Халатников И. М. ЖЭТФ, **40**, 1713 (1961).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 16 декабря 1992 г.