УДК 535.375.55

МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕЖИМЫ ВКР

В.А. Андреев

Найдены многосолитонные решения системы уравнений, описывающей вынужденное комбинационное рассеяние.

Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) имеет большую историю [1], однако до сих пор продолжает привлекать к себе внимание исследователей. По мере развития экспериментальной техники обнаруживаются новые черты и детали этого процесса, для объяснения которых требуется использование современных теоретических представлений, прежде всего относящихся к когерентным и кооперативным явлениям [2].

Одним из них является пространственное квантование энергии ВКР [3]. Оно состоит в том, что при любых конфигурациях освещения и длинах активного объема в поперечном сечении первой стоксовой компоненты наблюдаются отдельные яркие пятна круглой формы, соответствующие определенным порциям излучения ВКР "назад". Фон при этом практически отсутствует. Для каждой такой отдельной порции характерна энергия E_0 не больше 9 мкДж ($\sim 10^{13}$ квантов). Они характеризуются высокой пространственной когерентностью, и их расходимость близка к лазерной.

В квантовой оптике известно несколько механизмов, качественно объясняющих такой режим излучения. Мы остановимся на одном из них, основанном на образовании солитонов. В оптике процесс формирования излучения в виде пространственно локализованных сгустков, которые сами при движении не расплываются, но постоянно удаляются друг от друга, можно описать уравнениями, обладающими многосолитонными решениями. Именно такие уравнения и используются при описании ВКР [4 – 8]. В данной работе построены такие решения.

Солитонные режимы ВКР рассматривались ранее в ряде работ [5 – 8]. В работах [5, 6] найден ряд точных решений соответствующих уравнений. Эти решения представляют собой либо локализованные односолитонные импульсы, либо бесконечные цуги 2π импульсов тригонометрического типа. Нам же для описания структуры стоксовой компоненты нужны многосолитонные решения. Такие решения удается построить для уравнений, использовавшихся в работах [5, 6] с помощью метода обратной задачи.

Для простоты рассмотрим сначала одномерную задачу. Эволюция импульсов возбуждающего и первого стоксова излучений ВКР описывается укороченными уравнениями Максвелла для огибающих амплитуд полей и уравнениями движения для средних значений поляризации. В случае резонанса $\omega_i - \omega_s = \omega_v$, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial z} + \frac{1}{c_s}\frac{\partial E_s}{\partial t} &= -\frac{1}{2k_s}\lambda\mu_0\omega_s^2 NVE_i, \\ \frac{\partial E_i}{\partial z} + \frac{1}{c_i}\frac{\partial E_i}{\partial t} &= \frac{1}{2k_i}\lambda\mu_0\omega_i^2 NVE_s, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\lambda}{\hbar}E_iE_sW, &\quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\hbar}E_iE_sV. \end{aligned} \tag{1}$$

(2)

Здесь E_i, E_s – амплитуды импульсов возбуждающего и первого стоксова излучения; c_i, c_s – групповые скорости этих импульсов; k_i, k_s – модули их волновых векторов; V – амплитуда поперечной поляризации; W – полуразность заселенностей верхнего и нижнего уровней; $\mu_0 = 4\pi/c^2$; λ – матричный элемент рассеяния. В дальнейшем мы будем предполагать, что $c_i = c_s = c_g$. В реальных условиях эксперимента [3] c_i и c_s отличаются на единицы процентов.

Делая замену переменных

$$P = (1/2)[(k_i/\omega_i^2)E_i^2 - (k_s/\omega_s^2)E_s^2],\ Q = (\sqrt{k_ik_s}/\omega_i\omega_s)E_iE_s,$$
$$x = \omega_i\omega_s z/\sqrt{k_ik_s},\ \tau = (\lambda/\hbar)(\omega_i\omega_s/\sqrt{k_ik_s})(t - z/c_g),$$

систему (1) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \partial P/\partial x = QV, &\quad \partial V/\partial\tau = PW, \\ \partial Q/\partial x = -PV, &\quad \partial W/\partial\tau = -PV. \end{aligned} \tag{3}$$

В работе [4] для системы (2) была найдена L-A пара. Однако ее решения можно найти другим путем. Мы покажем, что система (2) имеет вид преобразований Беклунда для уравнения синус-Гордон. Для этого сначала отметим факт существования законов сохранения:

$$(P^2 + Q^2)_x = 0,\quad (V^2 + W^2)_\tau = 0,$$

$$P^2 + Q^2 = f^2(\tau), \quad V^2 + W^2 = g^2(x).$$

Вводя новые функции $\varphi(x,\tau)$, $\theta(x,\tau)$, величины P, Q, V, W можно представить в виде

$$\begin{gathered} P = f(\tau)\sin\varphi(x,\tau),\ V = g(x)\sin\theta(x,\tau), \\ Q = f(\tau)\cos\varphi(x,\tau),\ W = g(x)\cos\theta(x,\tau). \end{gathered} \tag{4}$$

Непосредственно из уравнений (2) следует, что функции φ и θ удовлетворяют системе

$$\varphi_x = g(x)\sin\theta,\ \theta_\tau = f(\tau)\sin\varphi.$$

Вводя новые независимые переменные

$$X = \int^{x} g(\xi)d\xi,\ T = \int^{\tau} f(\xi)d\xi \tag{5}$$

и неизвестные функции

$$U_+ = \varphi + \theta,\ U_- = \varphi - \theta, \tag{6}$$

получим, что U_+, U_- – удовлетворяют уравнению синус-Гордон

$$U_{+XT} = \sin U_+,\ U_{-XT} = \sin U_- \tag{7}$$

и связаны друг с другом преобразованием Беклунда

$$\begin{gathered} \left(\frac{U_+ + U_-}{2}\right)_X = \sin\left(\frac{U_+ - U_-}{2}\right), \\ \left(\frac{U_+ - U_-}{2}\right)_T = \sin\left(\frac{U_+ + U_-}{2}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, мы видим, что система (1) в результате замен (4), (5) преобразовалась к системе (7), которая является преобразованием Беклунда для уравнения синус-Гордон. Поэтому решения системы (1) выражаются через два решения уравнения синус-Гордон (7). Так, например, если U_+ есть N-солитонное решение уравнения синус-Гордон, то U_- будет $(N+1)$-солитонным решением, построенным из U_+ с помощью спектрального параметра $\zeta = 1$.

Теперь, используя формулы (3), (4), (5), можно найти выражения для решений системы (1):

$$E_i^2 = \frac{\omega_i^2}{k_i} f(\tau)\left[1 + \sin\left(\frac{U_N + U_{N+1}}{2}\right)\right] = \frac{\omega_i^2}{2k_i}[2f(\tau) + (U_N - U_{N+1})_\tau],$$

$$E_s^2 = \frac{\omega_s^2}{k_s} f(\tau)\left[1 - \sin\left(\frac{U_N + U_{N+1}}{2}\right)\right] = \frac{\omega_s^2}{2k_s}[2f(\tau) - (U_N - U_{N+1})_\tau],$$

$$V = g(x)\sin\left[\frac{1}{2}(U_N - U_{N+1})\right] = \frac{1}{2}(U_N + U_{N+1})_x,$$

$$W = g(x)\cos\left[\frac{1}{2}(U_N - U_{N+1})\right] = \frac{g(x)}{(U_N - U_{N+1})_x}\left[\frac{(U_N + U_{N+1})_x}{g(x)}\right]_x.$$

В эти решения явным образом входят интегралы движения $f(\tau), g(x)$. Эти же функции, согласно формулам (4), определяют и вид независимых переменных X, T, через которые выражаются солитонные решения уравнения синус-Гордон. Для нахождения этих решений надо задать начальное условие $U(X,0) = F(x)$ на всей области определения переменной X.

В связи с этим возникают две технические проблемы. Во-первых, интегралы движения $f(\tau)$, $g(x)$ могут оказаться таковыми, что переменная X, заданная с помощью соотношения (4), будет определена лишь на конечном отрезке. Это приводит к трудностям при решении обратной задачи рассеяния.

Во-вторых, для того, чтобы решить задачу Коши для уравнения синус-Гордон (6), мы должны задать начальное условие для функции U. В самой же системе (1) начальные условия задаются для величин E_i, E_s, V, W, выражающихся через две функции U_+, U_-, связанные преобразованием Беклунда (7). Физически нам известны начальные данные для полей E_i, E_s, V, W, а для формального построения решений с помощью метода обратной задачи мы должны знать начальные данные для полей U. Нахождение связи между этими двумя типами начальных данных и является второй проблемой.

Анализ этих проблем необходим для точного количественного описания решения, качественно же характер их эволюции следует из общих свойств многосолитонных решений. Мы надеемся, что в дальнейшем их можно будет использовать для описания эффекта разделения стоксовой компоненты ВКР на отдельные порции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сущинский М.М. Вынужденное рассеяние света. М., Наука, 1985.

[2] Андреев В.А., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в оптике. М., Наука, 1986.

[3] Соколовская А.И. Препринт ФИАН N 103, М., 1991.

[4] Андреев В.А. Труды ФИАН, **173**, 200 (1986).

[5] Махвиладзе Т.М., Сарычев М.Е., Шелепин Л.А. ЖЭТФ, **69**, 499 (1975).

[6] Махвиладзе Т.М., Сарычев М.Е. ЖЭТФ, **71**, 896 (1976).

[7] Steudel H. Physica, **6D**, 143 (1983).

[8] Kaup D. Physica, **6D**, 155 (1983).

Поступила в редакцию 10 декабря 1992 г.