УДК 517.958:530.182:533.9

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ В ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

В.Ф. Ковалев, С.В. Кривенко, В.В. Пустовалов

На примере релятивистского заряженного электронного газа построены и решены нелокальные определяющие уравнения группы Ли, допускаемой уравнениями Власова – Максвелла.

Система уравнений самосогласованного поля в кинетической теории бесстолкновительной плазмы (система уравнений Власова – Максвелла) является интегродифференциальной [1]. Ее нелокальность обусловлена интегрированием функции распределения частиц f по импульсам $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$ в выражениях, определяющих плотности тока $\mathbf{j}$ и заряда ρ в плазме (e и m – заряд и масса частицы, γ – релятивистский фактор):

$$\mathbf{j} = em^3 \int d\mathbf{v}\gamma^5 \mathbf{v} f; \;\; \rho = em^3 \int d\mathbf{v}\gamma^5 f. \tag{1}$$

Канонический инфинитезимальный оператор (ИО) χ непрерывной точечной группы Ли [2], допускаемой такой системой, состоит из пяти вкладов с координатами κ, подлежащими отысканию (по числу функций в уравнениях Власова – Максвелла; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – векторы напряженности самосогласованных электрического и магнитного полей):

$$\chi = \kappa^1 \partial_f + \kappa^2 \partial_{\mathbf{E}} + \kappa^3 \partial_{\mathbf{B}} + \kappa^4 \partial_{\mathbf{j}} + \kappa^5 \partial_\rho. \tag{2}$$

Первый из этих вкладов в (2) содержит операцию дифференцирования по функции распределения f, требующую такого обобщения, которое позволило бы применять ее не только к функциям от f, но и к линейным функционалам (1) от f. Подобное обобщение в функциональном анализе существует и известно как производная Фреше [1]. Мы используем с этой целью [7] следующее явное представление обсуждаемого вклада в

[1] В зависимости от типа предельного перехода в бесконечномерном пространстве функций, используемого в соответствующем определении, говорят о дифференциалах Фреше или Гато [3 – 6].

виде интеграла по скорости частиц $\mathbf{v}$ от вариационных производных по f с весом – координатой κ^1

$$\kappa^1 \partial_f \equiv \int d\mathbf{v} \kappa^1(\mathbf{v}) \frac{\delta}{\delta f(\mathbf{v})}. \tag{3}$$

Здесь ради краткости записи в качестве аргументов функции распределения f и координаты κ^1 канонического ИО (2) указана только одна переменная – скорость $\mathbf{v}$, по которой выполняется интегрирование, как в (1), так и в (3). Полный набор подразумевающихся в (3) аргументов одночастичной функции распределения f хорошо известен в кинетической теории: это время t, радиус-вектор $\mathbf{x}$ положения частицы в пространстве и ее скорость $\mathbf{v}$:

$$f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{4}$$

Координата κ канонического ИО (2) зависит от групповых переменных

$$t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, f, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \rho \tag{5}$$

и соответствующих первых производных (см., например, сводку формул (10) для κ). Ниже мы увидим, что κ^1 является, в частности, функцией от f. В контексте с выражением (3) эта завивисимость понимается с учетом (4):

$$\kappa^1 = \kappa^1(f) = \kappa^1(f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \equiv \kappa^1(\mathbf{v}). \tag{6}$$

Использование выражения (3) в (2) в сочетании с известным результатом вариационного дифференцирования f по f в виде δ-функции Дирака

$$\frac{\delta f(\mathbf{v})}{\delta f(\mathbf{v}\prime)} = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}\prime) \tag{7}$$

дает искомую формулировку условий инвариантности интегральных материальных соотношений кинетики плазмы (1) относительно группы Ли с каноническим ИО (2) – нелокальные определяющие уравнения (ОУ) этой группы:

$$\kappa^4 = em^3 \int d\mathbf{v} \gamma^5 \mathbf{v} \kappa^1, \;\; \kappa^5 = em^3 \int d\mathbf{v} \gamma^5 \kappa^1. \tag{8}$$

Интегральные ОУ (8) и приведенная здесь схема их построения не являются общепринятыми в групповом анализе уравнений математической физики [8 – 10]. Формулировка (8) соответствует подходу, суммированному в работе [11]. Решение нелокальных

ОУ (8), составляющее предмет данной работы, существенно зависит от структуры входящих в них координат κ ИО (2). В кинетической теории бесстолкновительной плазмы этот вопрос решается просто: строение координат κ, т.е. их зависимость от групповых переменных (5), конкретизируется дифференциальной частью системы уравнений Власова – Максвелла

$$f_t + \mathbf{v} f_{\mathbf{x}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\Big[\mathbf{v}, \mathbf{B}\Big]\right\} f_{\mathbf{p}} = 0;$$

$$c\,\mathrm{rot}\mathbf{E} + \mathbf{B}_t = 0;\ \mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho;\ c\,\mathrm{rot}\mathbf{B} - \mathbf{E}_t = 4\pi\mathbf{j};\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0. \tag{9}$$

Локальные ОУ для κ, возникающие как условия инвариантности дифференциального многообразия (9) относительно ИО (2), решаются, в отличие от (8), в рамках стандартной схемы группового анализа [8 – 10]. Мы приведем здесь результат их интегрирования в частном случае однокомпонентной плазмы без нейтрализующего фона (например, релятивистского заряженного газа электронов без соударений):

$$\kappa^1 = \eta(f) - \xi^1 f_t - \xi^2 f_{\mathbf{x}} - \xi^3 f_{\mathbf{v}},\ \kappa^2 = -A_4\mathbf{E} + [\mathbf{gE}] - c[\mathbf{bB}] - \xi^1\mathbf{E}_t - (\xi^2\nabla)\mathbf{E},$$

$$\kappa^3 = -A_4\mathbf{B} + [\mathbf{gB}] + c[\mathbf{bE}] - \xi^1\mathbf{B}_t - (\xi^2\nabla)\mathbf{B},\ \kappa^4 = -2A_4\mathbf{j} + [\mathbf{gj}] + c^2\rho\mathbf{b} - \xi^1\mathbf{j}_t - (\xi^2\nabla)\mathbf{j},$$

$$\kappa^5 = -2A_4\rho + (\mathbf{bj}) - \xi^1\rho_t - (\xi^2\rho_{\mathbf{x}},\ \xi^1 = A_0 + \mathbf{bx} + A_4 t;$$

$$\xi^2 = \mathbf{A} + \mathbf{b}c^2 t + [\mathbf{gx}] + A_4\mathbf{x};\ \xi^3 = \mathbf{b}c^2 - (\mathbf{bv})\mathbf{v} + [\mathbf{gv}]. \tag{10}$$

Здесь c – скорость света в вакууме; $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{x}$ – оператор дифференцирования по радиусу-вектору $\mathbf{x}$; $A_0, \mathbf{A}, A_4, \mathbf{b}$ и $\mathbf{g}$ произвольные постоянные, соответствующие в трехмерном случае одиннадцати скалярным постоянным интегрирования локальных ОУ; $\eta(f)$ – неизвестная пока скалярная функция одной переменной – функции распределения частиц плазмы.

Произвол в выборе зависимости $\eta(f)$ допускается локальными ОУ и ликвидируется решением нелокальных ОУ (8). Убедимся в этом.

Второе (скалярное) из двух ОУ (8) представляет собой условие инвариантности выражения для плотности заряда ρ в (1). Как обычно, оно понимается с учетом всей системы (9), (1) уравнений Власова – Максвелла. После подстановки в него явных выражений для κ^1 и κ^5 из (10) оно приводится к следующему виду:

$$em^3 \int d\mathbf{v}\gamma^5[\eta(f) + 2A_4 f] = 0. \tag{11}$$

В соответствии с пояснением (4), (6) к (3) в ОУ (11) подразумевается зависимость f от скорости $\mathbf{v}$, по которой производится интегрирование в объеме шара радиусом c

$$em^3c^5 \int\limits_{|\mathbf{v}|\leq c} d\mathbf{v}(c^2 - \mathbf{v}^2)^{-5/2}[\eta(f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})) + 2A_4 f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})] = 0.$$

При переходе от второго ОУ системы (8) к ОУ (11) выполнено интегрирование по частям по скорости $\mathbf{v}$, явно учитывающее выражение для ξ^3 из (10). Подынтегральные функции при этом полагаются равными нулю на поверхности сферы $|\mathbf{v}| = c$.

Решение ОУ (11) как линейного неоднородного интегрального уравнения для $\eta(f)$ не представляет труда. В самом деле, уравнение (11), как и всякое ОУ (локальное или нелокальное – все равно), в соответствии с основными положениями теории Ли есть тождество по групповой переменной f. Поэтому его можно дифференцировать по f, – и оно по-прежнему останется справедливым. Интегральность ОУ (11) диктует не обычное дифференцирование, используемое при расщеплении локальных (дифференциальных) ОУ, а вариационное дифференцирование по f:

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{v}\prime)} \int d\mathbf{v}(c^2 - \mathbf{v}^2)^{-5/2}[\eta(f(\mathbf{v})) + 2A_4 f(\mathbf{v})] = 0. \tag{12}$$

Пронося вариационную производную в (12) под знак интеграла по скоростям частиц плазмы

$$\int d\mathbf{v}(c^2 - \mathbf{v}^2)^{-5/2}[\eta_f + 2A_4]\frac{\delta f(\mathbf{v})}{\delta f(\mathbf{v}\prime)} = 0 \tag{13}$$

и снимая интегрирование по $\mathbf{v}$ с помощью возникающей под знаком интеграла дельта-функции (7), получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения зависимости η от f:

$$\eta_f + 2A_4 = 0. \tag{14}$$

Его решение имеет вид линейного по f бинома

$$\eta(f) = -2A_4 f + A. \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) для η в исходное ОУ (11), получим соотношение

$$A\int d\mathbf{v}(c^2-\mathbf{v}^2)^{-5/2}=0, \tag{16}$$

выполнение которого требует отождествления постоянной интегрирования A в (15) с нулевым значением:

$$\eta(f)=-2A_4 f. \tag{17}$$

Первое (векторное) нелокальное ОУ системы (8) отвечает инвариантности выражения плотности тока $\mathbf{j}$ в (1) относительно обсуждаемой группы и удовлетворяется тождественно на решениях (10), (17). Его независимое решение с помощью (10) указанным выше способом приводит к тому же результату (17). Учет выражения (17) для η в равенстве для κ^1 в (10) исчерпывает вопрос о явном виде координаты κ^1 ИО (2) именно благодаря решению (17), (10) нелокальных ОУ (8). Это завершает построение непрерывной точечной группы Ли, допускаемой системой уравнений Власова – Максвелла (9), (1). Она оказывается одиннадцатипараметрической (по числу скалярных постоянных в (10), (17)) и представляется следующими базисными ИО, которые мы для наглядности переписываем в неканоническом виде:

$$\chi_0=\partial_t;\ \chi_i=\partial_{x_i};$$
$$Y_i=x_i\partial_t+c^2t\partial_{x_i}+(c^2\delta_{is}-v_iv_s)\partial_{v_s}-ce_{isn}B_s\partial_{E_n}++ce_{isn}E_s\partial_{B_n}+c^2\rho\partial_{j_i}+j_i\partial_\rho;$$
$$Z_i=e_{isn}(x_s\partial_{x_n}+v_s\partial_{v_n}+E_s\partial_{E_n}+B_s\partial_{B_n}+j_s\partial_{j_n});$$
$$\chi_4=t\partial_t+x_s\partial_{x_s}-2f\partial_f-E_s\partial_{E_s}-B_s\partial_{B_s}-2j_s\partial_{j_s}-2\rho\partial_\rho. \tag{18}$$

Здесь $1\le i,s,n\le 3$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, δ_{is} и ϵ_{isn} – символы Кронекера второго и третьего ранга.

Физический смысл ИО (18) следующий: χ_0 и χ_i определяют преобразования переноса по времени t и трем компонентам радиуса-вектора $\mathbf{x}$. Оператору $\mathbf{Y}$ отвечают преобразования Лоренца групповых переменных (5) с инвариантной функцией распределения f (в частности – гиперболические вращения в плоскостях $(ct,\mathbf{x})$ и $(c\rho,\mathbf{j})$). Круговые вращения определяются ИО $\mathbf{Z}$, ИО χ_4 соответствует преобразование растяжения – единственное в (18) групповое преобразование с участием функции распределения частиц f.

Расширение набора (5) групповых переменных вовлечением в преобразования параметров e,m,c системы (9), (1)

$$t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, e, m, c, f, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \rho \tag{19}$$

добавляет к базису (18) еще три скалярных ИО, учитывающих растяжения заряда и массы частицы e, m и скорости света c в вакууме:

$$\chi_5 = m\partial_m - 2f\partial_f + E_s\partial_{e_s} + B_s\partial_{B_s} + j_s\partial_{j_s} + \rho\partial_\rho;\ \chi_6 = e\partial_e + m\partial_m - 4f\partial_f;$$
$$\chi_7 = c\partial_c + x_s\partial_{x_s} + v_s\partial_{v_s} - 3f\partial_f + E_s\partial_{E_s} + B_s\partial_{B_s} + j_s\partial_{j_s}. \tag{20}$$

При этом группа Ли становится бесконечной с общим элементом, зависящим от четырнадцати скалярных функций трех групповых переменных e, m, c.

Полученные формулы (18), (20), являющиеся прямым следствием изложенной здесь схемы построения и решения нелокальных ОУ (8) непрерывной точечной группы Ли симметрии уравнений Власова – Максвелла (9), (1), свидетельствуют о конструктивности представления (3) первого вклада в каноническом ИО (2), учитывающего интегрирование по скоростям $\mathbf{v}$ в материальных соотношениях (1). Варианты тривиального обобщения (3) увеличением числа переменных интегрирования достаточно очевидны (см., например, Приложение 4 в [12]).

В заключение подчеркнем, что в физическом плане результат данной заметки не следует сводить просто к интерпретации формул (18), (20) для точечной симметрии уранений кинетики заряженного электронного газа с самосогласованным электромагнитным полем. Благодаря единству подхода и другим конкретным примерам [7, 11, 12] (число которых умножаемо), этот результат можно сформулировать в виде некоторой общей концепции в групповом анализе кинетического уравнения Власова. Ее суть состоит в комбинировании локального группового анализа (2), (10) дифференциальной части системы Власова – Максвелла (9) с нелокальным групповым анализом (2), (8) материальных соотношений (1). Построение нелокальных ОУ (8) формализуется благодаря представлению (3), а их преобразование с учетом (10) и последующее расщепление вариационным дифференцированием (12) замыкает всю схему группового анализа системы (9), (1) на вполне регулярном уровне. Последняя из указанных операций (12) не содержится в подходе [11].

Авторы признательны М.А. Егорову, Н.Х. Ибрагимову, С.П. Коновалову и Д.В. Ширкову за обсуждение свойств и места представления (3) в классическом [8] и современном [9, 10] групповом анализе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Власов А. А. ЖЭТФ, **8**, 291 (1938); УФН, **93**, 444 (1967).

[2] Ибрагимов Н. Х. Матем. сб., **109**, 229 (1979).

[3] Конторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., Наука, 1984, глава XVII.

[4] Треногин В. А. Функциональный анализ. М., Наука, 1980, глава 8.

[5] Frechet M. Ann. Ec. Norm., **27**, 193 (1910).

[6] Gateaux R. C. R. Akad. Sci., **157**, 325 (1913).

[7] Ковалев В.Ф., Кривенко С.В., Пустовалов В.В. Препринт ФИАН N 152, М., 1991; Письма в ЖЭТФ, **55**, 256 (1992); IX Коллоквиум "Современный групповой анализ. Методы и приложения", Нижний Новгород, 24-30 июня 1992 г., Тезисы докладов, с. 28.

[8] Lie S. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig-Oslo, Bd. 5 (1924); Bd. 6 (1927).

[9] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.

[10] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983.

[11] Мелешко С. В. Докторская диссертация. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1991.

[12] Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. Препринт ФИАН N 62, М., 1992.

Поступила в редакцию 11 февраля 1993 г.