

УДК 537.222.2

К ТЕОРИИ КИЛЬВАТЕРНОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Г. Б. Нерсисян

Найдены выражения для кильватерного потенциала и плотности индуцированного заряда, возникающих при движении быстрой заряженной частицы в диэлектрике. Показано, что кильватерный потенциал является суперпозицией гармонических функций с различными периодами и амплитудами. Проведены численные расчеты плотности кильватерного заряда для углерода и обсуждается их соответствие с экспериментальными данными.

Быстрая заряженная частица, проходя через вещество, возбуждает за собой волну плотности заряда (кильватерную волну) и за счет этого теряет энергию [1, 2]. Эти потери энергии, называемые поляризационными и определяемые напряженностью электрического поля в месте нахождения частицы, детально исследовались в течение долгого времени и служили источником информации о кильватерной волне [3 – 7]. Сравнительно недавно удалось экспериментально исследовать поле кильватерной волны не только в месте нахождения частицы, но и сзади за ней на расстоянии нескольких длин волн [8]. Авторами работы [8] эти результаты обсуждались в свете наиболее полно разработанной теории кильватерных полей в газе свободных электронов [7, 9, 10], где они имеют квазигармоническую зависимость от координаты. Однако эксперименты проводились не только в проводниках, где имеются свободные электроны, но и в диэлектриках, где свободные электроны отсутствуют и основную роль в поляризации среды играют связанные электроны [6].

В данной работе рассматривается кильватерное поле в диэлектрике, для описания которого использована модель Клаузиуса – Мосотти и восприимчивость среды, определяемая матричными элементами дипольного момента атома (квантово-механический аналог модели квазиупругосвязанных осцилляторов) [11]. Показано, что кильватерное

поле является суммой квазигармонических функций с различными амплитудами и периодами, которые выражаются через силы осцилляторов и частоты переходов атома вещества. Для углерода рассчитана погонная плотность кильватерного заряда в зависимости от координаты. Результаты расчетов сопоставлены с данными эксперимента по измерению поля кильватерной волны в углероде.

Рассмотрим поле, создаваемое заряженной нерелятивистской частицей с зарядом Q , движущейся со скоростью v в однородной и изотропной материальной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$. В цилиндрической системе координат с осью Oz , направленной вдоль движения частицы, в квазистатическом приближении ($v \ll c$) электрический потенциал определяется формулой [7]:

$$\varphi(r, \xi) = \frac{Qv}{\pi} \int_0^{\infty} dk J_0(\kappa r) \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega\xi/v)}{(\omega^2 + \kappa^2 v^2) \epsilon(\omega)}, \quad (1)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $\xi = z - vt$; r и z координаты точки наблюдения. Формула (1) справедлива при условии, что $v \gg v_0$, где v_0 – характерная скорость движения электронов среды.

Будем считать, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega)$ удовлетворяет соотношению Клаузиуса – Мосотти [11], а атомы вещества до взаимодействия с пробной частицей находились в основном состоянии с энергией E_0 :

$$3 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} = \sum_j \frac{\omega_0^2 f_j}{\omega_j^2 - i\Gamma_j \omega - \omega^2}, \quad (2)$$

где $\omega_0^2 = 4\pi n e^2 / m$; n – концентрация атомов; $\hbar\omega_j = E_j - E_0$ – одна из частот квантового перехода атома; Γ_j – обратное время жизни атома в возбужденном состоянии j ; f_j – сила осциллятора, определяющая вероятность переходов атома из основного состояния в возбужденное. Суммирование в формуле (2) ведется по всем возможным разрешенным переходам.

Для определения кильватерного потенциала заряженной частицы необходимо исследовать нули функции $\epsilon(\omega)$. С этой целью положим в формуле (2) $\epsilon(\omega) = 0$ и рассмотрим дисперсионное уравнение

$$p(\bar{\omega}) \equiv \sum_j \frac{\omega_0^2 f_j}{\omega_j^2 - i\Gamma_j \bar{\omega} - \bar{\omega}^2} = -\frac{3}{2}. \quad (3)$$

Все решения этого уравнения лежат в нижней комплексной полуплоскости ω и расположены симметрично относительно мнимой оси [5]. Применяя принцип аргумента [12]

к функции $p(\omega) + 3/2$ в нижней комплексной полуплоскости ω , приходим к выводу, что число нулей и полюсов у этой функции совпадают. Для сил осцилляторов, удовлетворяющих неравенству $f_j \ll \omega_j^2/\omega_0^2$ и в пределе малого затухания ($\Gamma_j \ll \omega_j$), нули диэлектрической проницаемости определяются из формул:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_j &\equiv \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\omega_0} \right) \approx \nu_j + \frac{f_j/3\nu_j}{1 + \frac{2}{3} \sum_{s=j}^{\tau} f_s(\nu_s^2 - \nu_j^2)^{-1}}, \\ \bar{\Gamma}_j &\equiv -\operatorname{Im}(\bar{\omega}_j) = \frac{1}{2}\Gamma_j, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\nu_j = \omega_j/\omega_0$ ($\nu_1 < \nu_2 < \dots$). В каждом интервале от ν_j до ν_{j+1} ($j = 1, 2, \dots, \tau - 1$), а также при $\nu > \nu_\tau$, имеется один корень $\bar{\nu}_j$ (τ - число возможных квантовых переходов). В пренебрежении стоящей в знаменателе суммой выражение (4) совпадает с полученным в работах [13, 14].

Интеграл, входящий в формулу (1), определяется вычетами функции $1/\epsilon(\omega)$ в точках $\bar{\omega}$. В пределе $\Gamma_j \ll \omega_j$ они равны:

$$A_j^{-1} \equiv \left\{ \frac{2}{\omega_0 \frac{d}{d\omega} \epsilon(\bar{\omega}_j)} \right\}^{-1} = \frac{4}{9} \sum_s \frac{f_s \bar{\nu}_j}{(\nu_s^2 - \bar{\nu}_j^2)^2}. \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в формулу (1), найдем потенциал пробного заряда

$$\begin{aligned} (Qk_0)^{-1} \varphi(r, \xi) &= \frac{1}{k_0(r^2 + \xi^2)^{1/2}} - \sum_j A_j W_2(\bar{\nu}_j k_0 | \xi |; \bar{\nu}_j k_0 r) + \\ &+ \sum_j 2A_j \theta(-\xi) \sin(\bar{\nu}_j k_0 \xi) \exp(g_j k_0 \xi) K_0(\bar{\nu}_j k_0 r), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_0 = \omega_0/v$, $g_j = \bar{\Gamma}_j/2\omega_0$, $K_0(x)$ - функция Макдональда, $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда ($\theta(0) = 1/2$);

$$W_2(a; b) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \exp(-ax) J_0(bx).$$

Первое слагаемое в формуле (6) отвечает кулоновскому потенциалу. Второе - определяет краевой потенциал, возникающий вблизи частицы, причем функция $W_2(a; b)$ монотонно убывает при увеличении как a , так и b . Более детально ее свойства рассмотрены в [15]. Последнее слагаемое в формуле (6) определяет кильватерный потенциал. Видно, что он является суммой квазигармонических функций с амплитудами $2A_j K_0(\bar{\nu}_j k_0 r)$ и периодами $2\pi/\bar{\nu}_j k_0$. Именно этот потенциал характеризует поле на больших расстояниях за частицей ($k_0 | \xi | \gg 1/\min(\bar{\nu}_j)$). На расстояниях $k_0 r \gtrsim 1/\min(\bar{\nu}_j)$ при удалении от оси движения частицы амплитуда кильватерного поля убывает экспоненциально.

Наличие осциллирующего потенциала в (6) определяется плотностью кильватерного заряда. Из уравнения Пуассона имеем:

$$\rho_v(\mathbf{r}, \xi) = -Q\delta(\xi)\delta(\mathbf{r}) - \nabla^2\varphi/4\pi = Qk_0\theta(-\xi)\delta(\mathbf{r}) \sum_j A_j \exp(g_j k_0 \xi) \sin(\bar{\nu}_j k_0 \xi), \quad (7)$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – двумерная функция Дирака. Как следует из (7), индуцированный заряд возникает за частицей и только на ее траектории. При учете конечности атомных размеров плотность кильватерного заряда размывается.

Полный индуцированный в среде кильватерный заряд определяется интегралом от величины $\rho_v(\mathbf{r}, \xi)$ по объему и равен

$$Q_v = -Q \sum_j A_j / \bar{\nu}_j = -Q(1 - 1/\epsilon_0) < 0,$$

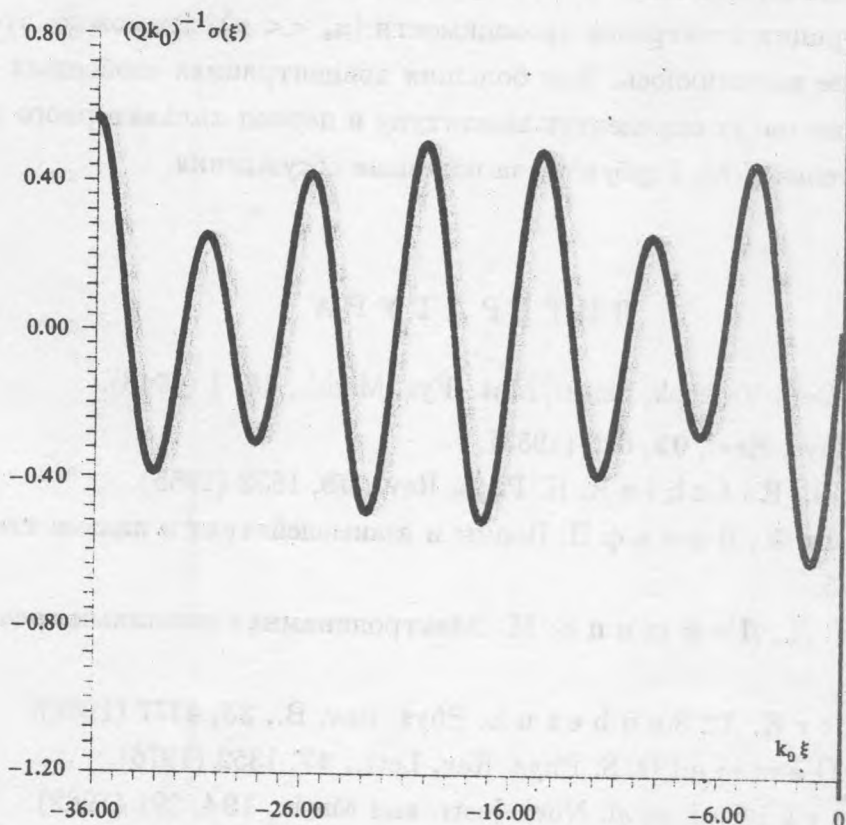


Рис. 1. Зависимость погонной плотности заряда от расстояния до частицы в углероде. Частица расположена в точке $\xi = 0$.

где $\epsilon_0 = [3 + 2p(0)]/[3 - p(0)]$ – статическая диэлектрическая проницаемость вещества. В отличие от проводников [5, 7, 9, 10], где индуцированный заряд равен заряду частицы с противоположным знаком, в диэлектрике индуцируется заряд в $(1 - 1/\epsilon_0)^{-1}$ раз меньший. Если среда в целом нейтральна, то наличие заряда Q_v означает, что вне траектории частицы возникает заряд с обратным знаком $-Q_v$. В частности, в работе [16] показано, что при движении частицы по оси цилиндра, заполненного средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$, по его поверхности движется индуцированный заряд, величина которого равна $Q(1 - 1/\epsilon_0)$.

На рис. 1 изображена зависимость погонной плотности заряда $\sigma(\xi)$ (интеграл по переменной r от величины ρ_v) от расстояния до частицы в углероде. Значения A_j и $\bar{\nu}_j$ найдены из уравнений (3), (5), а данные для f_j, ω_j взяты из [17]. Как следует из рисунка, средний период осцилляций составляет 140 Å, что несколько больше, чем экспериментально полученное значение (100 Å) [8]. Такое отличие может быть связано с тем обстоятельством, что наше рассмотрение справедливо только при пренебрежимо малой концентрации электронов проводимости ($n_e \ll n$). Возможно, это условие в эксперименте [8] не выполнялось. При больших концентрациях свободных электронов ($n_e \lesssim n$) именно они могут определять амплитуду и период кильватерного поля.

Автор признателен Л.М. Горбунову за полезные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] B o h r N. K. Den. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., **18**, 1 (1948).
- [2] P i n e s D. Phys. Rev., **92**, 626 (1953).
- [3] N e u f f e l d J., R i t c h i e R. H. Phys. Rev., **98**, 1632 (1955).
- [4] П л а т ц м а н Ф., В о л ь ф П. Волны и взаимодействия в плазме твердого тела. М., Мир, 1975.
- [5] Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
- [6] B r u e c k n e r K. A., S e n b e t u L. Phys. Rev. B., **25**, 4377 (1982).
- [7] V a g e r Z., G e m m e l D. S. Phys. Rev. Lett., **37**, 1352 (1976).
- [8] K u m b a r t z k i G. J. et al. Nucl. Instr. and Meth., **194**, 291 (1982).
- [9] N e e l a v e t h i V. N., R i t c h i e R. H., B r a n d t W. Phys. Rev. Lett., **33**, 302 (1974).
- [10] K e i n i g s R., J o n e s M. E. Phys. Fluids, **30**, 252 (1987).

- [11] Браун В. Диэлектрики. М., ИЛ, 1961.
- [12] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987.
- [13] Hall R. O., Hall H. Phys. Rev., **73**, 477 (1948).
- [14] Huysbrechts M., Schönberg M. Nuovo Cimento, **9**, 764 (1952).
- [15] Горбунов Л. М., Матевосян Г. Г., Нерсисян Г. Б. ЖЭТФ, **102**, 841 (1992).
- [16] Нерсисян Г. Б. Краткие сообщения по физике ФИАН, N8, 17 (1992).
- [17] Wiese W. L., Smith M. W., Glennon V. M. Atomic Transition probabilities, vol. 1, Hydrogen Through Neon. Washington, 1966.

Поступила в редакцию 4 марта 1993 г.