УДК 533.95

ДЬЯВОЛЬСКАЯ ЛЕСТНИЦА И СПЕКТРЫ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

А. М. Игнатов

Показано, что спектр колебаний замагниченной плазмы в гофрированном волноводе представляет собой дьявольскую лестницу.

В работе [1] численно исследован спектр линейных колебаний плазмы в сильном магнитном поле, помещенной в волновод с периодически модулированными стенками. Основной результат этой работы выглядит нетривиально – оказалось, что вместо регулярной зависимости частоты ω от волнового вектора k, спектральные кривые плотно заполняют полосу $0 < \omega < \omega_p$ (где ω_p – плазменная частота) в плоскости (ω, k). Поскольку подобный спектр отличается от сплошного, в [1] он был назван плотным. В настоящей заметке исследуется, по сути, та же проблема, однако совершенно другим методом, причем и результат оказывается другим.

Рассмотрим холодную однокомпонентную плазму в бесконечно сильном магнитном поле, направленом вдоль оси x. Ограничиваясь для простоты плоской геометрией и чисто потенциальными колебаниями, запишем уравнение для потенциала электрического поля в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где $c^2 = \omega_p^2/\omega^2 - 1 = -\epsilon_{xx}(\omega)$, причем рассматриваем область частот $\omega < \omega_p$. Пусть плазма ограничена проводящими стенками, расположенными при $y = \pm a(x)$, где $a(x)$ – некоторая периодическая положительная функция, тогда $\phi(x, \pm a(x)) = 0$. Выбором масштабов можно добиться, чтобы период $a(x)$ был равен единице.

Уравнение (1) в криволинейной полосе возникает во многих задачах физики, например, при исследовании сверхзвуковых течений в каналах [2] или электромагнитного поля в резонаторе с движущейся стенкой [3]. Есть, однако, существенное отличие в математической постановке задачи между упомянутыми примерами и физикой плазмы:

величина c здесь не является заданной, это – собственное значение уравнения (1), связанное с волновым вектором, который в периодической системе задается граничным условием

$$\phi(x+1,\,y) = \exp(2\pi ik)\phi(x,\,y), \tag{2}$$

где $0 < k < 1$.

Решение периодической задачи (1), (2) строится аналогично случаю произвольной зависимости $a(x)$ [2], и выглядит следующим образом. Из-за симметрии все решения разбиваются на четные и нечетные по y. Рассмотрим, для простоты, нечетное решение $\phi(x,\,y) = \Phi(x-cy) - \Phi(x+cy)$. Пусть $x_1(x,\,c)$ – решение уравнения $x = x_1 - ca(x_1)$, тогда из граничных условий на боковых стенках следует, что $\Phi(x) = \Phi(f(x,\,c))$, где $f(x,\,c) = x_1(x,\,c) + ca(x_1(x,\,c))$. Функция $f(x,\,c)$ однозначна, причем $f'_x(x,\,c) > 0$, если $c\max \mid a'(x) \mid < 1$, что и будет предполагаться выполненным, т.е. рассматривается область частот достаточно близких к ω_p. Полагаая $\Phi(x) = \exp(2\pi ni\psi(x))$, где n – произвольное целое число, получаем, что решение системы уравнений

$$\psi[f(x,\,c)] = \psi(x) + 1, \tag{3}$$

$$\psi(x+1) = \psi(x) + k \tag{4}$$

порождает бесконечную серию решений системы (1), (2).

Решение одного уравнения (3) строится просто: поскольку $f'_x(x,\,c) > 0$, достаточно задать функцию $\psi(x)$ произвольным образом на отрезке $(b,\,f(b,\,c))$, где b – любое число, а затем при помощи (3) "растащить" ее на всю действительную ось. Наличие второго условия (4), определяющего связь между c и k, т.е. спектр колебаний, с одной стороны снимает этот произвол, а с другой – существенно усложняет задачу.

Очевидно что в силу периодичности системы $f(x+1,\,c) = f(x,\,c) + 1$, т.е. $f(x,\,c)$ осуществляет отображение окружности в себя. Подобные отображения давно исследуются в теории динамических систем [4, 5]. Рассмотрим число вращения $W(c)$ Пуанкаре этого отображения, которое определяется как

$$W(c) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x,\,c)/n, \tag{5}$$

где $f^{(n)}(x,\,c)$ – n-ная итерация функции f. Эта величина обладает следующим свойством: если $f(x,\,c)$ непрерывно зависит от параметра c, то $W(c)$, во-первых, также является непрерывной функцией c и, во-вторых, грубыми являются отображения с рациональными числами вращения. Если число $W(c) = p/q$, где p и q – взаимно простые числа, то существует q-цикл отображения, т.е. набор чисел s_i $(i = 0...q-1)$ таких, что $s_{i+1} = f(s_i, c)$ и $s_q = s_0 + p$, причем последовательность $f^{(n)}(x, c)$ при больших n для любого x периодически пробегает окрестность точек s_i. Кроме того, в этом случае существует конечный интервал изменения c, обозначаемый как $\Delta_{p/q}$, на котором функция $W(c)$ постоянна.

Связь между волновым спектром и $W(c)$ видна непосредственно из системы (3), (4). Если отображение $f(x, c)$ имеет q-цикл, то, как легко убедиться, решение существует только если $k = 1/W(c) = q/p$, что и определяет связь ω и k. Иными словами, для плазменных волн спектральная зависимость $k(\omega)$ имеет вид так называемой дьявольской лестницы, т.е. непрерывной функции, которая имеет конечный интервал постоянства при каждом рациональном значении k.

Зная элементы цикла s_i, легко построить явное решение (3), (4) – соответствующая функция $\psi(x)$ постоянна в промежутке между любыми двумя последовательными элементами цикла и имеет скачок величиной $1/p$ в точках $x = s_i + n$, где n – целое число. В явном виде проще выписать выражение для производной $\Phi'(x)$, т.е. фактически для y-компоненты электрического поля на оси

$$\Phi'_x(x, c) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[2\pi i(qn + j)/p]\delta(x - s_j(c) - n). \tag{6}$$

Таким образом, исследование исходной спектральной задачи сводится к нахождению корней $f^{(q)}(x, c) = x + p$, что в общем виде может быть проделано только численно. Тем не менее, оценки характерных величин можно получить, используя разложение по степеням отклонения границы от прямой. Выберем масштаб по y так, чтобы $a(x) = (1/2)(1 + \epsilon\Delta(x))$ $(\epsilon \ll 1)$, тогда в первом порядке по ϵ имеем $f^{(q)}(x, c) = x + qc + \epsilon\Delta_q(x, c)$, где

$$\Delta_q(x, c) = \sum_{i=0}^{q-1} \Delta(x + (i + 1/2)c) \tag{7}$$

периодическая функция с периодом $1/q$. При $\epsilon = 0$ число вращения $W(c) = c$, т.е. спектр системы определяется соотношением $k = 1/c$, а из (3), (4) следует $\psi(x) = kx$, что соответствует обычным волнам Трайвелписа – Гулда.

При отличном от нуля ϵ, условие существования некоторого q-цикла: $qc + c\epsilon\Delta_q(x, c) = p$ дает $c = p/q + c_1$, причем c_1 может изменяться в интервале с длиной по порядку величины равной $\Delta_{p/q} \cong \epsilon\delta_q p/q$, где δ_q – q-я гармоника разложения Фурье функции $\Delta(x)$. Отметим, что самыми широкими будут ступеньки дьявольской лестницы с $q = 1$.

Для физики больший интерес представляют не сами по себе сингулярные решения типа (6), а задача о поведении пакета таких волн. Поскольку влияние возмущения границы приводит к разбуханию гладкой зависимости $\omega(k)$, которая превращается во фрактальную кривую, естественно предположить, что это приводит к затуханию волнового пакета. Естественная оценка для "ширины линии" и, соответственно, для декремента затухания пакета, т.е. суперпозиции волн с разными $c \cong c_0$, дает $\gamma \cong \omega'(c_0)\Delta_0$, где Δ_0 – максимальная ширина ступеньки, попадающей в волновой пакет, а $\omega(c) = \omega_p(c^2 + 1)^{1/2}$.

Если пакет состоит из волн, целиком попадающих на ступеньку дьявольской лестницы с $q = 1$, то его временную эволюцию удается описать без привлечения каких-либо разложений. В этом случае

$$\int\limits_{\Delta_{p/1}} dc\, g(c)\Phi'_x(x, c) = R'(x)g[R(x)],$$

где $R(x) = p[2a(x + p/2)]^{-1}$. Это выражение для суперпозиции волн вида $g(c) = g_0(c)\exp[-i\omega(c)t]$ явно определяет зависимость поля от времени. Характерная величина затухания, вызванного фазовым перемешиванием, совпадает с приведенной выше оценкой.

Как уже отмечалось, полученные здесь результаты не согласуются с численными расчетами [1]. Хотя причины этого расхождения не вполне ясны, можно предположить, что расчет дает наложение сразу большого числа дисперсионных кривых, тогда как в настоящей работе обсуждалась только одна из них – все остальные получаются умножением k на произвольное целое число. Заметим также, что, по-видимому, полученные в [1] спектры отнюдь не плотны – как видно из приведенных выше оценок, в случае слабой гофрировки волновода спектральные кривые близки к невозмущенным и не могут плотно покрыть конечную часть плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L o w W. R. et al. Phys. Rev. Lett., **67**, 2481(1991).

[2] Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1977.

[3] Д о д о н о в В. В., К л и м о в А. Б., М а н ь к о В. И. Труды ФИАН, **208**, 105 (1922).

[4] Н е й м а р к Ю. И., Л а н д а Л. Г. Стохастические и хаотические колебания, М., Наука, 1987.

[5] J e n s e n H. J., B a k P, B o h r T. Phys. Rev., A, **30**, 1960 (1984).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 19 марта 1993 г.