УДК 530.145 + 535.33

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЛОХА И АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

В.П. Карасев

Показано, что в задачах с гамильтонианами, линейными по генераторам V_α полиномиальных алгебр Ли $sl^{\varphi}_{pd}(2)$, уравнения Гейзенберга для наблюдаемых, связанных с V_α, сводятся к нелинейным обобщениям уравнений Блоха, которые в приближении среднего поля решаются в квадратурах в терминах специальных абелевых интегралов.

Известно, что динамика полуклассических моделей квантовой оптики (в которых квантуется либо только вещество, либо только поле) с гамильтонианами вида

$$H = \sum_{i=1}^{3} a_i S_i + C,\ [S_i, C] = 0,\ S_i \in sl(2) \tag{1}$$

описывается в картине Гейзенберга с помощью уравнений Блоха [1 – 3]:

$$i\hbar dS_i/dt = \sum_j \alpha_{ij} S_j,\ i = 1,2,3\ (\text{или } i = 0, \pm), \tag{2}$$

где $S_i(t)$ – компоненты вектора Блоха [1], удовлетворяющие в любой момент времени коммутационным соотношениям алгебры Ли $sl(2)$ [3]. Уравнения (2) легко решаются с помощью подстановки

$$S_i(t) = C_i(t) + \sum_j \beta_{ij}(t) S_j,\ S_j = S_j(0), \tag{3}$$

следующей из коммутационных соотношений для $sl(2)$ [3].

Недавно в работах [4 – 6] было показано, что ряд квантово-оптических гамильтонианов, описывающих полностью квантовые модели и обладающих некоторыми симметриями, выражается в форме (1), где вместо компонент S_i вектора Блоха стоят генераторы

V_i полиномиальных алгебр Ли $sl_{pd}^{\varphi}(2)$ – специфических деформаций алгебры Ли $sl(2)$ (индекс "pd" определяет тип деформации, а φ – символ структурной функции). Генераторы V_i удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[V_0, V_\pm] = \pm V_\pm, \ [V_-, V_+] = \Psi(V_0) = \Delta_x \varphi(x) \mid_{x=V_0},$$
$$\Delta_x \varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x), \tag{4}$$

где $\varphi(V_0)$ – определяющий все структурные свойства алгебры $sl_{pd}^{\varphi}(2)$ полином (в отличие от разности экспонент для q-деформированной $sl_q(2)$) от переменной V_0. Например, для типичных мультибозонных гамильтонианов [6, 7]

$$H_1 = \omega_0 a_0^+ a_0 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i a_i^+ a_i + g_1 (a_1^+ a_2^+ ... a_n^+) a_0 + g_1^* (a_1 ... a_n) a_0^+ \tag{5}$$

и

$$H_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i a_i^+ a_i + g_2 (a_1^+)^n (a_2)^m + g_2^* (a_1)^n (a_2^+)^m \tag{6}$$

структурные полиномы $\varphi_1(V_0)$ и $\varphi_2(V_0)$ имеют, соответственно, вид

$$\varphi_1(V_0) = \prod_{i=1}^{n} (R_i - (n+1)^{-1} \textstyle\sum_{j=1}^{n} R_j + V_0)((n+1)^{-1} \sum_{j=1}^{n} R_j - V_0 + 1),$$
$$V_0 = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i^+ a_i - a_0^+ a_0)/(n+1) \tag{7}$$

и

$$\varphi_2(V_0) = (n[V_0 + mR/(n+m)])^{(n)} (m[nR/(m+n) - V_0 + 1])^{(m)},$$
$$V_0 = (a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2)/(n+m), \ A^{(B)} = A(A-1)...(A-B+1), \tag{8}$$

где $R_j = a_j^+ a_j + a_0^+ a_0$ и $R = a_1^+ a_1/n + a_2^+ a_2/m$ – инвариантные операторы (интегралы движения) для (5) и (6) соответственно.

Результаты работ [4 – 6] показали эффективность применения формализма алгебр $sl_{pd}^{\varphi}(2)$ к решению физических задач в картине Шредингера. Ниже мы продемонстрируем это и в картине Гейзенберга.

Действительно, с помощью коммутационных соотношений (4) уравнения Гейзенберга $i\hbar dV_\alpha/dt = [V_\alpha, H]$ для коллективных когерентных динамических переменных V_α с гамильтонианами $H = aV_0 + bV_+ + b^* V_- + C$ приводятся к виду

$$i\hbar dV_0/dt = bV_+ - b^*V_-, \tag{9}$$

$$i\hbar dV_+/dt = -aV_+ - b^*\Psi(V_0), \tag{10}$$

$$i\hbar dV_-/dt = aV_- + b\Psi(V_0),\ \Psi(V_0) = \varphi(V_0+1) - \varphi(V_0), \tag{11}$$

где $\varphi(V_0)$ и $\Psi(V_0)$ – структурные полиномы алгебры $sl^{\varphi}_{pd}(2)$ из (4). Уравнения (9) – (11) для гамильтонианов (5), (6) сводятся при низших значениях степеней n и m к линейным уравнениям типа (2), а поэтому в общем случае могут быть названы нелинейными (полиномиальными) обобщениями уравнений Блоха.

Однако в силу нелинейного характера уравнений (9) – (11) и коммутационных соотношений (4) анзатц (3) не пригоден для решения уравнений (9) – (11) и должен быть заменен его нелинейным аналогом

$$V_\alpha(t) = \sum_{l\geq 0}[A_{l\alpha}(V_0;t)(V_-)^l + (V_+)^l B_{l\alpha}(V_0;t)],\ V_\alpha = V_\alpha(0). \tag{12}$$

Подставляя (12) в исходные уравнения Гейзенберга для V_α и используя соотношения (4) и теорему Пуанкаре – Биркгофа – Витта для алгебры $sl^{\varphi}_{pd}(2)$ как фактор-алгебры универсальной обертывающей алгебры $U(w(r))$ алгебры Вейля – Гейзенберга $w(r)$, получим для определения нелинейных, вообще говоря, операторных функций $A_{l\alpha}(...)$ и $B_{l\alpha}(...)$ системы дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{gathered} i\hbar \tfrac{dA_{l\alpha}(V_0;t)}{dt} = -alA_{l\alpha}(V_0;t) + bA_{l+1\alpha}(V_0-1;t)\varphi(V_0) - \\ -bA_{l+1\alpha}(V_0;t)\varphi(V_0+l+1) + b^*A_{l-1\alpha}(V_0+1;t) - b^*A_{l-1\alpha}(V_0;t) \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$\begin{gathered} i\hbar \tfrac{dB_{l\alpha}(V_0;t)}{dt} = alB_{l\alpha}(V_0;t) - bB_{l-1\alpha}(V_0+1;t) + \\ +bB_{l-1\alpha}(V_0;t) - b^*B_{l+1\alpha}(V_0-1;t)\varphi(V_0) + b^*B_{l+1\alpha}(V_0;t)\varphi(V_0+l+1). \end{gathered} \tag{14}$$

Уравнения (13), (14) могут быть интерпретированы как специфические нестационарные уравнения Шредингера с конечно-разностным (по переменным V_0 и l) оператором Шредингера и исследованы с помощью методов теории конечных разностей [8]. Не останавливаясь здесь на этой самостоятельной теме, приведем лишь некоторые эвристические соображения физического плана о характере решений исходных обобщенных уравнений Блоха (9) – (11).

Прежде всего отметим, что решение системы (9) – (11) сводится после несложных преобразований к решению одного нелинейного уравнения:

$$d^2V_0(t)/dt^2 = A\tilde{C} - \hbar^2 A^2 V_0(t) + B\Psi(V_0(t)), \tag{15}$$

где $A = a/\hbar^2$, $B = 2 \mid b \mid^2 /\hbar^2$, $\tilde{C} = [H - C]$ – не зависящий от времени оператор (интеграл движения). Легко видеть, что в обычно используемых (ср. [7, 9]) в физическом анализе такого рода уравнений квазиклассических приближениях (среднего поля) уравнение (15) может быть решено в квадратурах. Действительно, используя приближение среднего поля, задаваемое условиями

$$< \Psi(V_0(t)) >= \Psi(< V_0(t) >), \tag{16}$$

из уравнения (10) получим уравнение для c-числовой функции $v(t) =< V_0(t) >$:

$$\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2 = 2\left[A\tilde{C}v(t) - \frac{\hbar^2 A^2}{2}(v(t))^2 + B\int^{v(t)} dy\Psi(y) + D\right], \tag{17}$$

которое для полиномиальных структурных функций типа (7), (8) решается в терминах гиперэллиптических интегралов (в отличие от экспоненциальных структурных функций для $sl_q(2)$), определяющих специальные абелевы функции [10]. В частности, при $n = 2$ в (7) и $m + n = 3$ в (8) уравнение (17) решается в терминах γ-функции Вейерштрасса, которая одновременно дает стационарное решение уравнения Кортевега–де-Фриза [11, 12]. Отметим, что сходные результаты были получены впервые для модели (5) при $n = 2$ в работе [7], а для модели Дикке в работе [9] без использования формализма алгебр $sl^{\varphi}_{pd}(2)$. Однако наш подход, во-первых, дает унифицированную трактовку широкого класса физических моделей, а, во-вторых, условие квазиклассичности (16) проще и физически нагляднее, чем сформулированные в указанных работах в терминах исходных модовых переменных.

Установленная выше связь квазиклассических решений уравнений (9) – (11) с абелевыми функциями позволяет использовать свойства последних для выявления различных физических особенностей и эффектов в квантово-оптических моделях, ассоциированных с $sl^{\varphi}_{pd}(2)$ как с алгебрами динамической симметрии. В частности, свойство двоякопериодичности абелевых функций [10, 11], а также мероморфность некоторых из них (типа γ-функции) делают весьма прозрачным объяснение таких физических явлений, как коллапсы и восстановления (revivals), осцилляций Раби, "пленение" излучения, "взрывные" решения и т.д. [9, 13, 4]. Кроме того, такие квазиклассические решения могут быть использованы для поиска квантовых поправок по общей схеме работы [12], давая тем самым схемы квантования классических версий исходных квантовых моделей на алгебраических многообразиях, определяемых структурными полиномами $\Psi(x)$ и соответствующими абелевыми функциями. Точные же решения (типа (8)) уравнения (15) определяют операторные аналоги классических абелевых функций.

В целом результаты настоящей работы и работ [4 – 6] демонстрируют плодотворность применения формализма алгебр $sl^{\varphi}_{pd}(2)$ к анализу и решению квантово-оптических (а в более широком плане – квантовых многочастичных) моделей с существенно нелинейными (неквадратичными) гамильтонианами и ставят вопрос об изучении новых классов специальных функций, ассоциированных с алгебрами $sl^{\varphi}_{pd}(2)$.

В этом плане интересно отметить, что алгебраические уравнения, определяющие в картине Шредингера энергетические спектры задач с динамической $sl^{\varphi}_{pd}(2)$ – симметрией [4 – 6], могут быть решены в терминах тэта-констант и гиперэллиптических интегралов [11].

ЛИТЕРАТУРА

[1] B l o c h F. Phys. Rev., **70**, 460 (1946).

[2] A l l e n L., E b e r l y J. H. Optical resonance and two-level atoms. New York, Wiley, 1975.

[3] K a r a s s i o v V. P., P r a n t s S. V., P u z y r e v s k y V. I. In: Interaction of electromagnetic field with condensed matter, Singapore, World Scientific, 1990, p. 3.

[4] К а р а с е в В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N9, 31 (1991); N7,8, 9 (1992).

[5] K a r a s s i o v V. P. J. Sov. Laser Res., **13**, 188, 288 (1992).

[6] К а р а с е в В. П. Теор. мат. физ., **95**, 3 (1993).

[7] K u m a r S., M e h t a C. L. Phys. Rev. A, **21**, 1573 (1980).

[8] M i l n e - T h o m s o n L. M. The Calculus of Finite Differences. Cambridge, Univ. Press, 1951.

[9] K a d a n t s e v a E. P., C h i m i l o v s k i W., S h u m o v s k y A. S. Int. J. Mod. Phys. B, **3**, 1713 (1989).

[10] М а р к у ш е в и ч А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций. М., Наука, 1979.

[11] М а м ф о р д Д. Лекции о тэта-функциях. М., Мир, 1988.

[12] Р а д ж а р м а н Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М., Мир, 1985.

[13] K o z i e r o w s k i M., C h u m a k o v S. M., M a m e d o v A. A. Physica A, **180**, 435 (1992).

Поступила в редакцию 9 апреля 1993 г.