УДК 530.145

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ФУНКЦИИ КВАЗИВЕРОЯТНОСТИ КВАНТОВЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

В. П. Карасев

Изучены поляризационные когерентные состояния света как обобщенные когерентные состояния группы $SU(2)_p$ поляризационной инвариантности световых полей. В их терминах определены поляризационные функции квазивероятности, задающие квазиклассическое описание статистических поляризационных свойств квантовых световых полей.

Известно [1, 2], что обобщенные когерентные состояния (ОКС) $| \{\alpha_i\}; \psi_0 >$ являются эффективным инструментом изучения свойств квантовых систем с группами G^{DS} динамической симметрии (ДС). Они порождаются действием операторов $D(g) = \exp(\sum_i \alpha_i F_i)$ сдвигов групп G^{DS} на некоторые фиксированные (эталонные) векторы $| \psi_0 >$ в заданных пространствах L^D представлений $D(G) = \{D(g), g \in G^{DS}\}$ групп G^{DS}. В частности, средние $< \{\alpha_i\}; \psi_0 \mid f(\{F_i\}) \mid \{\alpha_i\}; \psi_0 >$ от произвольных (соответствующих наблюдаемым величинам) функций $f(\{F_i\})$ генераторов F_i групп G^{DS} и функции $Q(\{\alpha_i\}; \psi_0)_\rho = < \{\alpha_i\}; \psi_0 \mid \rho \mid \{\alpha_i\}; \psi_0 >$ распределения квазивероятности (ρ – матрица плотности) используются для описания квазиклассических свойств (вблизи "классического предела") соответствующих квантовых систем [1–3]. Так, например, в квантовой оптике широко используются такого рода величины, определенные с помощью обычных (связанных с группой Вейля – Гейзенберга $W(m)$) глауберовских КС для описания свойств m-модового электромагнитного поля [3, 4] и с помощью ОКС групп $SU(n)$ для описания свойств систем $n-$уровневых излучателей [4, 5].

Недавно было показано [6–8], что группой ДС, адеквантно описывающей поляризационные свойства квантового света, является группа $SU(2)_p$ поляризационной инвариантности свободных световых полей. Ее генераторы P_α, $\alpha = 0,1,2$ (или $\alpha = 0, \pm$), суть компоненты поляризационного квазиспина, соответствующего вектору Стокса в классической статистической оптике, чьи значения располагаются на так называемой сфере Пуанкаре [9]. Цель настоящей работы – определить и исследовать ОКС этой группы $SU(2)_p$ в $2m$-модовом (две моды поляризационные и m пространственно-временных (ПВ)) фоковском пространстве $L_F(2m) = \mathrm{Span}\,\{\prod_{j=1}^{m}(a_+^+(j))^{n_j^+}(a_-^+(j))^{n_j^-} \mid 0>\}$ (в спиральном ($\pm$) поляризационном базисе) и обсудить их применение для квазиклассического описания поляризационных свойств квантового света.

Известно общее определение

$$\mid \xi; \psi_0 > \equiv \mid \Theta, \varphi; \psi_0 > = \exp(\xi J_+ - \xi^* J_-) \mid \psi_0 > \tag{1}$$

ОКС группы $SU(2)$, где $\xi = -(\Theta/2)e^{-i\varphi}$, $\Theta, \varphi (0 \le \Theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ – угловые координаты положения "классического" квазиспина $\mathbf{J} = (J_\alpha)$ в его "фазовом" пространстве – сфере Пуанкаре, а $\mid \psi_0 >$ – некоторый фиксированный вектор в пространстве L состояний системы [1, 2]. Для спиновых систем с фиксированным значением спина j в качестве $\mid \psi_0 >$ выбирают один из базисных векторов $\mid jm >$ неприводимого представления (НП) $D^j(SU(2))$. Максимально близким к классическим ("сжатым") ОКС соответствуют значения $m = \pm j$ [1, 10]. Специфика поляризационного спина ($J_\alpha = P_\alpha$) световых полей заключается в том, что фоковские пространства $L_F(2m)$ состояний поля содержат (вообще говоря, кратно) подпространства $L^{j,\sigma}$ НП $D^j(SU(2))$ с $j = p = 0, 1/2, 1, \ldots$, где σ различает $SU(2)$-эквивалентные $L^{j,\sigma}$ и отвечает дополнительным степеням свободы [6–8]. Поэтому для получения полного "поляризационного фазового портрета" квантового светового поля (на всем $L_F(2m)$) необходимо иметь полные системы ОКС $SU(2)_p$ вида (1) с множеством эталонных векторов $\mid \psi_0 > = \mid \psi_0^{p,\sigma} > \in L^{p,\sigma}$, $p = 0, 1/2, \ldots$, либо с семейством векторов $\mid \psi_0 > = \mid \psi_0, \gamma >$ с ненулевыми проекциями на каждое подпространство $L^{p,\sigma}$, $p = 0, 1/2, \ldots$.

В первом случае, исходя из критерия максимальной классичности [1, 10] по поляризационным степеням свободы, в качестве $\mid \psi_0^{p,\sigma} >$ естественно взять векторы

$$\mid p, \pi = \pm p; n, \lambda > = \sum C(\{\alpha_i^\pm\}, \{\gamma_{ij}\}) \prod_{j=1}^{m} (a_\pm^+(j))^{\alpha_j^\pm} \prod_{i<j} (X_{ij}^+)^{\gamma_{ij}} \mid 0 >, \tag{2}$$

где $\sum \alpha_j^\pm = 2p$, $\sum \gamma_{ij} = n - 2p$, $X_{ij}^+ \equiv a_+^+(i)a_-^+(j) - a_-^+(i)a_+^+(j)$. Эти векторы принадлежат к ортонормированному базису в пространстве $L_F(2m)\{\mid p, \pi; n, \lambda >\}$, который приспособлен к учету поляризационной структуры и определяется соотношениями: $P^2 \mid p, \pi; n, \lambda > = p(p+1) \mid p, \pi; n, \lambda >$, $P_0 \mid p, \pi; n, \lambda > = \pi \mid p, \pi; n, \lambda >$, $N \mid p, \pi; n, \lambda > =$

$= n \mid p, \pi; n, \lambda >$, $\lambda-$ дополнительное квантовое число [7, 8]. В частных случаях $m = 1, 2$ векторы (2) принимают, соответственно, вид [7]

$$\mid p, \pm p; n = 2p >= [(2p)!]^{-1/2}(a^{+}_{\pm}(1))^{2p} \mid 0 >, 2p = 0, 1, ... \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mid p, \pm p; n, t >= \left[\frac{(n+1)!(n-2p)!(p-t)!(p+t)!}{(2p+1)!}\right]^{-1/2} \times \\ \times (a^{+}_{\pm}(1))^{p+t}(a^{+}_{\pm}(2))^{p-t}(X^{+}_{12})^{n-2p} \mid 0 >, \end{aligned} \tag{4}$$

где $2t$ – разность $N(1) - N(2) = N_{+}(1) + N_{-}(1) - N_{+}(2) - N_{-}(2)$ чисел фотонов в первой и второй ПВ-модах.

Тогда, используя общее определение (1) и трансформационные свойства $a^{+}_{\pm}(j)$, X^{+}_{ij} относительно действия группы $SU(2)_p$ [7, 8], получим системы порожденных эталонными векторами (2) поляризационных ОКС

$$\begin{aligned} \mid \Theta, \varphi; p, n, \lambda >_{\pm} \equiv \exp(\xi P_{+} - \xi^{*} P_{-}) \mid p, \pm p; n, \lambda >= \\ = \sum C(\{\alpha^{\pm}_{i}, \gamma_{ij}\}) \prod_{j} (\eta^{\pm}(\Theta, \varphi), a^{+}(j))^{\alpha^{\pm}_{j}} \prod_{i<j} (X^{+}_{ij})^{\gamma_{ij}} \mid 0 >, \\ P_{\pm} = \sum_{j=1}^{m} P_{\pm}(j) = \sum_{j=1}^{m} a^{+}_{\pm}(j) a_{\mp}(j), \end{aligned} \tag{5}$$

где оператор $(\eta^{\pm}(\Theta, \varphi), a^{+}(j)) = a^{+}_{\pm}(j) \cos\Theta/2 \pm a^{+}_{\mp}(j) e^{\pm i\varphi} \sin\Theta/2$ можно интерпретировать как оператор рождения эллиптически поляризованного фотона в j-ой ПВ-моде с параметрами эллиптичности, определяемыми углами Θ, φ [11, 12]. Полученные системы поляризационных ОКС (5) принадлежат с математической точки зрения к классу полукогерентных [7] и дают следующее (выражающее свойство полноты) разложение единичного оператора $\hat{I}$ на $L_F(2m)$ [5, 1]:

$$\hat{I} = \sum_{n,p,\lambda} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \mid \Theta, \varphi; p, n, \lambda >_{\pm} < \Theta, \varphi; p, n, \lambda \mid_{\pm} \frac{2p+1}{4\pi} \sin\Theta d\Theta d\varphi. \tag{6}$$

Выбирая в качестве $\mid \psi^{p,\sigma}_{0} >$ иные, чем (2), эталонные векторы можно построить с помощью (1) другие системы ОКС $SU(2)_p$, которые в математическом плане эквивалентны (5). Например, в [7] вместо (2) взяты векторы $\mid \psi^{p,\{z_i\}}_{0} >= \exp(\sum_{i} z_i F_i) \times$ $\times \frac{(a^{+}_{\pm}(1))^{2p}}{\sqrt{(2p)!}} \mid 0 >$, где F_i - генераторы группы $SO^{*}(2m)$, дополнительной к $SU(2)_p$. Отметим также очевидное обобщение конструкции (5) на случай, когда группа $SU(2)_p$

действует в пространстве $L_F(2)$ каждой j-ой ПВ-моды независимо и ее действие задается углами Θ_j, φ_j:

$$|\{\Theta_j,\varphi_j\};\{n_j\}>_\pm \equiv \prod_{j=1}^{m}\exp(\xi_j P_+(j) - \xi_j^* P_-(j))\frac{(a_\pm^+(j))^{n_j!}}{\sqrt{n_j!}}|0>= \tag{7}$$
$$=\prod_{j=1}^{m}\frac{(\eta^\pm(\Theta_j,\varphi_j),a^+(j))^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|0>.$$

Система ОКС (7) полна (для нее имеет место аналог тождества (6)) и дает "поляризационный фазовый портрет поля", адекватный независимым измерениям для каждой ПВ-моды. Связь между системами (5) и (7) осуществляется с помощью обобщенных коэффициентов Клебша – Гордана $SU(2)_p$ [5].

Иной (не содержащий дискретных параметров n, λ) тип ОКС $SU(2)_p$ получим, если вместо (2) взять семейства эталонных векторов $|\psi_{0,\gamma}>$, имеющих ненулевые проекции на все $L^{p,\sigma}$. Примером таких семейств являются обычные глауберовские КС

$$|\{\alpha_j^+,\alpha_j^-\}>=\prod_{j=1}^{m}\exp[\alpha_j^+a_+^+(j)+\alpha_j^-a_-^+(j)-(\alpha_j^+)^*a_+(j)-(\alpha_j^-)^*a_-(j)]|0>. \tag{8}$$

Тогда с помощью определения (1) и учета $SU(2)_p$ – трансформационных свойств $a_\pm^+(j)$ из (8) получаем систему ОКС

$$|\Theta,\varphi;\{\alpha_j^+,\alpha_j^-\}>=\exp(\xi P_+ - \xi^* P_-)|\{\alpha_j^+,\alpha_j^-\}>=$$
$$=|\{\tilde\alpha_j^+(\Theta,\varphi),\tilde\alpha_j^-(\Theta,\varphi)\}>, \tag{9}$$
$$\tilde\alpha_j^\pm(\Theta,\varphi)=\alpha_j^\pm\cos\tfrac{\Theta}{2}\mp e^{\mp i\varphi}\alpha_j^\mp\sin\tfrac{\Theta}{2},$$

которая аналогична исходной системе (8), но с наличием двух дополнительных (избыточных) параметров Θ,φ. Естественно возникает вопрос о выделении из (9) подсистем с меньшим числом параметров, но полных в $L_F(2m)$.

В случае $m=1$ этот вопрос легко решается и дается подсистемами (9) вида (j – фиксированное):

$$|\Theta_j,\varphi_j;\alpha_j^+,0>\equiv|\Theta_j,\varphi_j;\alpha_j^+>_+,\ |\Theta_j,\varphi_j;0,\alpha_j^->\equiv|\Theta_j,\varphi_j;\alpha_j^->_-, \tag{10}$$

описывающими эллиптически поляризованные волны, тогда как в случае $m\geq 2$ подсистемы $\{|\Theta,\varphi;\{\alpha_j^+,0\}>\}$ и $\{|\Theta,\varphi;\{0,\alpha_j^-\}>\}$ не полны на $L_F(2m)$. Полные системы

ОКС такого типа на $L_F(2m)$ получим, если возьмем m-кратное произведение ОКС (10) (картина независимых ПВ-мод), либо с помощью действия операторов сдвига группы $SO^*(2m)$ на (10).

Полученные системы поляризационных ОКС могут быть использованы для квазиклассического анализа поляризационных свойств квантовых световых полей. В частности, следуя общим правилам [1–3], можно с помощью (1) определить полные поляризационные функции распределения квазивероятности

$$Q(\Theta,\varphi;\psi_0)_\rho \equiv <\Theta,\varphi;\psi_0 \mid \rho \mid \Theta,\varphi;\psi_0>, \tag{11}$$

где ρ – полная матрица плотности состояния поля, а $\mid \Theta,\varphi;\psi_0>$ определены в (1). Тогда, подставляя в (11) найденные выше спецификации (5), (7), (9), (10) для $\mid \Theta,\varphi;\psi_0>$, получим соответствующие конкретные типы полных поляризационных функций квазивероятности. Отметим, однако, что такие функции содержат, помимо поляризационных параметров (углы Θ,φ), еще и дополнительные квантовые числа $(n,p,\lambda,\{\alpha_j^\pm\}$ и т.д.), характеризующие неполяризационные степени свободы поля. Поэтому для получения его "поляризационного квазиклассического портрета" в состоянии ρ можно использовать редуцированные поляризационные функции квазивероятности, получаемые из (11) путем суммирования (или интегрирования) по индексам, задающим эталонные векторы $\mid \psi_0^{p,\sigma}>$ или $\mid \psi_{0,\gamma}>$. Такие функции могут быть использованы для анализа "поляризационного сжатия" по аналогии с обычными Q-функциями для анализа стандартного квадратурного сжатия [13].

В заключение укажем, что полученные поляризационные ОКС $SU(2)_p$ могут быть использованы и для анализа других аспектов поляризационного квазиклассического описания, среди которых отметим поляризационные соотношения неопределенностей и так называемые интеллигентные состояния [14], а также вопрос описания фазы квантового светового поля [15] и поляризационной фазы Берри [12, 16].

ЛИТЕРАТУРА

[1] П е р е л о м о в А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[2] K l a u d e r J. R. and S k a g e r s t a m B.-S. Coherent States. Applications in Physics and Mathematical Physics. Singapore, World Sci., 1985.

[3] П е р и н а Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М., Мир, 1987.

[4] К а р а с е в В. П., П у з ы р е в с к и й В. И. Труды ФИАН, **211**, 161 (1991).

[5] К а р а с е в В. П., Ш е л е п и н Л. А. Теоретическая и математическая физика, **45**, 54 (1980).

[6] К а р а с е в В. П. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 6, 12 (1991).

[7] K a r a s s i o v V. P. J. Sov. Laser Res., **12**, 431 (1991).

[8] K a r a s s i o v V. P. Preprint FIAN, N 63, M., 1992; J. Phys., A**26**, (1993) (in press).

[9] П о т е х и н В. К., Ш е л е п и н Л. А. Труды ФИАН, **173**, 173 (1986).

[10] D e l b o u r g o R. J. Phys., A**10**, 1837 (1977).

[11] Б ы к о в В. П. Успехи физических наук, **161**, 145 (1991).

[12] K l y s h k o D. N. Phys. Lett., A **140**, 19 (1989); A**163**, 349 (1992).

[13] Y u e n H. P. Phys. Rev., A**13**, 2226 (1976).

[14] A r a g o n e C., C h a l b a u d E. and S a l a m o S. J. Math. Phys., **17**, 1963 (1976).

[15] V o u d r a s A. Phys. Rev., A**41**, 1653 (1990); A**43**, 1564 (1991).

[16] В и н и ц к и й С. И. и др. Успехи физических наук, **160**, N 6, 1 (1990).

Поступила в редакцию 28 июня 1993 г.