УДК 530.5

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

А. Л. Шелепин [1]

Рассмотрено релятивистское псевдодифференциальное уравнение Шредингера и его решение (функция Грина) для случая свободной частицы.

В теории марковских процессов для амплитуд вероятности [1] эволюция амплитуды вероятности $\psi(x,t)$ в одномерном случае описывается уравнением:

$$i\partial\psi(x,t)/\partial t = \hat{H}\psi(x,t),$$
$$\hat{H} = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}A_n(x,t),\ \hat{H}^+ = \hat{H}, \tag{1}$$

$$A_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (x-x')^n u(x,t+\Delta t \mid x',t)dx, \tag{2}$$

где $u(x,t+\Delta t \mid x',t)$ – условная амплитуда (амплитуда перехода). Нерелятивистское уравнение Шредингера – уравнение второго порядка по $\partial/\partial x$ – получается из (1) при ограничении рассмотрения процессами с малыми приращениями, для которых амплитуда перехода при конечной разности $x - x'$ стремится к нулю быстрее чем Δt при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-x'|\geq\delta} u(x,t+\Delta t \mid x',t)dx = 0. \tag{3}$$

Условие (3) обеспечивает малую вероятность больших изменений (скачков) за малое время Δt.

---

[1] МИРЭА.

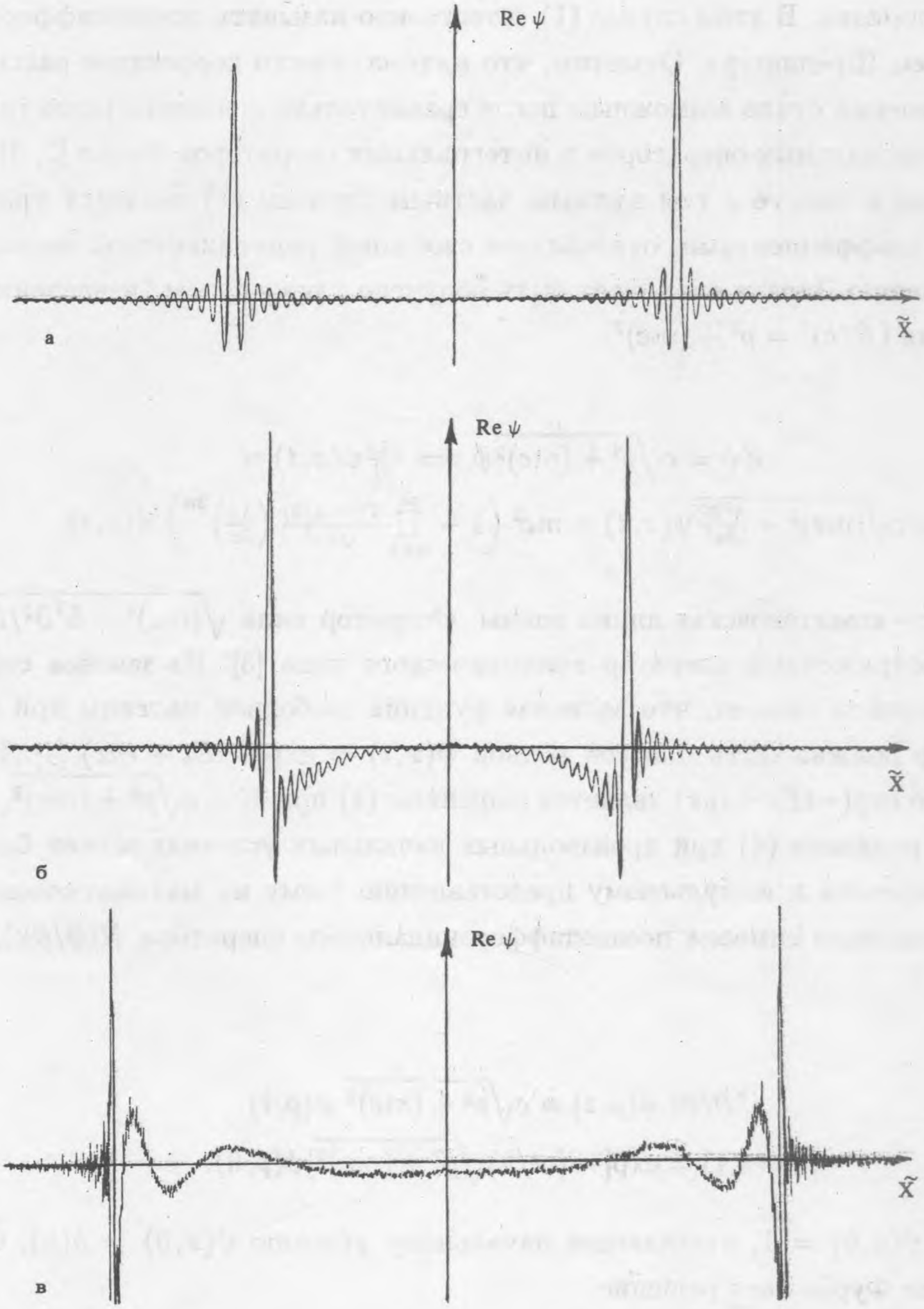

Рис. 1. *Зависимость* $Re\psi(x,t)$ *от координаты: а)* $m = 0$, $L = 25$; *б)* $\tilde{t} = 4$, $L = 30$; *в)* $\tilde{t} = 15$, $L = 40$.

Для произвольных процессов (в частности, в релятивистской квантовой теории) условие (3) не выполнено и необходимо рассматривать дифференциальные уравнения бесконечного порядка. В этом случае (1) естественно называть псевдодифференциальным уравнением Шредингера. Отметим, что математически корректное рассмотрение подобных уравнений стало возможным после сравнительно недавнего развития теории псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье [2, 3].

Простейшим и вместе с тем важным частным случаем (1) является уравнение с постоянными коэффициентами, отвечающее свободной релятивистской частице. Аналогично уравнению Дирака оно может быть получено также путем "извлечения корня" из соотношения $(E/c)^2 = p^2 + (mc)^2$:

$$\hat{E}\psi = c\sqrt{\hat{p}^2 + (mc)^2}\psi \Longrightarrow \tfrac{i\hbar\partial}{\partial t}\psi(x,t) =$$
$$= c\sqrt{(mc)^2 - \tfrac{\hbar^2\partial^2}{\partial x^2}}\psi(x,t) = mc^2\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}n!}\left(\tfrac{\lambda\partial}{\partial x}\right)^{2n}\right)\psi(x,t), \qquad (4)$$

где $\lambda = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны. Оператор вида $\sqrt{(mc)^2 - \hbar^2\partial^2/\partial x^2}$ – линейный самосопряженный оператор эллиптического типа [3]. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что волновая функция свободной частицы при фиксированных E и p должна быть плоской волной $\psi(x,t) = \exp(-iEt + ipx)$ [4]. Нетрудно убедиться, что $\exp(-iEt + ipx)$ является решением (4) при $E = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$.

Решение уравнения (4) при произвольных начальных условиях может быть получено путем перехода к импульсному представлению (чему на математическом языке отвечает нахождение символа псевдодифференциального оператора $\hat{H}(\partial/\partial x)$, $H(p) = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$):

$$i\hbar\partial/\partial t\ \psi(p,t) = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}\ \psi(p,t),$$
$$\psi(p,t) = \exp[-i(ct/\hbar)\sqrt{p^2 + (mc)^2}]\psi(p,0). \qquad (5)$$

Мы выберем $\psi(p,0) = 1$, отвечающее начальному условию $\psi(x,0) = \delta(x)$. Обратное преобразование Фурье дает решение

$$\psi(x,t) = (1/2\pi\hbar)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(px - ct\sqrt{p^2 + (mc)^2})/\hbar]dp =$$
$$= (1/\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\tilde{x} - i\sqrt{1 + k^2}\tilde{t})dk, \qquad (6)$$

где $\tilde{x} = x/\lambda$, $\tilde{t} = ct/\lambda, k = p/mc$, представляющее собой амплитуду перехода из точки $x_0 = 0$, в которой находилась частица при $t_0 = 0$, в точку x за время t: $u(x, t \mid 0, 0) = \psi(x, t)$.

Перейдем к анализу решения (6). Прежде всего отметим, что $\psi(x, t)$ – обобщенная функция, а ее график как функции x (рис. 1) представляет собой "толстую" линию. (Напомним, что если коэффициенты Фурье $\psi(p)$ убывают при больших p как $p^{-\alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1$, то фрактальная размерность кривой $d = 2 - \alpha$. В нашем случае, как и для δ-функции, $\alpha = 0$, $d = 2$.)

Если масса частицы $m = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\psi(x,t) &= \tfrac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[\tfrac{i}{\hbar}(px - ct \mid p \mid)]dp = \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \left\{ \tfrac{\sin[(x-ct)L]}{x-ct} + \tfrac{\sin[(x+ct)L]}{x+ct} \right\} = \\ &= \tfrac{1}{2}[\delta(x+ct) + \delta(x - \ .\ \ . \quad \mathrm{Im}\psi(x,t) = \tfrac{1}{2\pi} P \tfrac{ct}{x^2 - c^2t^2} \end{aligned} \tag{7}$$

и частица может быть найдена с равной вероятностью в точках $x = \pm ct$ (рис. 1а отвечает конечным пределам интегрирования, $L = 25$). Знак P в (7) указывает, что вычисление интегралов с $\mathrm{Im}\psi(x, t)$ должно проводиться в смысле главного значения.

Рис. 1б, в получены численным расчетом по формуле (6) при конечных пределах интегрирования от $-L$ до L, число точек разбиения интервала 10^5. При конечных L интеграл (6) дает обычную (гладкую) функцию, осциллирующую с частотой L (см. рис. 1 и формулу (7)). В пределе $L \to \infty$ осцилляции становятся бесконечно частыми и закрашивают полосу; для $\tilde{x} << \tilde{t}$ ширина полосы $\sim 1/\tilde{t}$. Эти бесконечно частые осцилляции конечной амплитуды вокруг некоторого среднего значения могут быть отброшены, т.к. вклада в какие-либо интегралы с ψ не дают. Сама ψ может быть представлена (за исключением точек $x = \pm ct$) в виде гладкой функции:

$$\psi(x,t) = \frac{-t}{2\lambda\sqrt{(ct)^2 - x^2}} H_1^{(2)} \left[\frac{\sqrt{(ct)^2 - x^2}}{\lambda} \right] + \frac{1}{2}[\delta(x+ct) + \delta(x-ct)], \tag{8}$$

где $H_1^{(2)}(z) = J_1(z) + iN_1(z)$ – функция Ганкеля первого порядка, $J_1(z)$ и $N_1(z)$ – функции Бесселя и Неймана. Выражение (8) получается из (6) путем использования формулы (2.5.39.2) из [5], продолженной на действительные значения параметра t при учете особенностей действительной части в точках $x = \pm ct$.

Рассмотрим теперь поведение $\psi(x, t)$ при различных x.

Область $x < ct$. Применение асимптотической формулы для функции Ганкеля при больших значениях аргумента $z = \sqrt{(ct)^2 - x^2}/\lambda$ (т.е. на расстояниях от светового конуса, значительно превышающих λ) дает:

$$\psi(x,t) \approx (2\pi i\lambda)^{-1/2}[(ct)^2 - x^2]^{-3/4} t \exp[-i((ct)^2 - x^2)^{1/2}]. \tag{9}$$

При $x << ct$, разлагая выражение в показателе экспоненты по степеням x/ct, получаем (с точностью до фазового множителя $\exp(-ict/\lambda)$) нерелятивистскую формулу для амплитуды перехода

$$\psi(x,t) \approx (2\pi ict\lambda)^{-1/2} \exp[-ict/\lambda + ix^2/2\lambda ct]. \tag{10}$$

Ее можно получить и непосредственно из (6) в предположении, что основной вклад в интеграл по импульсу p дает область с $p/mc << 1$.

На линиях $x = \pm ct$ $\psi(x,t)$ сингулярна: действительная часть имеет особенности типа $\delta(x \pm ct)$, мнимая $\propto 1/(x \pm ct)$.

Область $x > ct$. Аргумент $H_1^{(2)}(z)$ чисто мнимый, $\mathrm{Re}\psi(x,t) = 0$ и

$$\psi(x,t) = \frac{it}{\pi\lambda\sqrt{x^2 - (ct)^2}} K_1\left[\frac{\sqrt{x^2 - (ct)^2}}{\lambda}\right], \tag{11}$$

где $K_1(z)$ – функция Макдональда. С помощью асимптотической формулы для функции Макдональда при $\sqrt{x^2 - (ct)^2}/\lambda >> 1$ получим выражение, отличающееся от (9) отсутствием множителя $\imath$ перед корнем, т.е. $\mathrm{Im}\psi(x,t)$ спадает как $\exp[-\sqrt{x^2 - (ct)^2}/\lambda]$. При $|x| >> ct$

$$\psi(x,t) \approx ict(2\pi\lambda)^{-1/2} |x|^{-3/2} \exp[-|x|/\lambda]. \tag{12}$$

Значительный интерес представляет поведение $\psi(x,t)$ на малых временах. Действительно, в релятивистском случае отличны от нуля все четные $A_n \sim \lambda^n$, в нерелятивистском – только $A_2 \sim \lambda^2$, а эти коэффициенты согласно (2) определяются мнимой частью амплитуды перехода в пределе $\Delta t \to 0$. При $ct << \lambda$ частица ведет себя подобно частице с нулевой массой и график $\mathrm{Re}\psi(x,t)$ трудно отличить от графика на рис. 1а. Имеется лишь одно существенное отличие: при $|x| > \lambda$ $\mathrm{Im}\psi(x,t)$ спадает не как t/x^2, а экспоненциально. Оно и определяет степенную зависимость A_n от λ (чтобы убедиться в этом, достаточно подставить (12) в (2)). При увеличении времени полоса между δ-образными пиками в точках $x = \pm ct$ отклоняется от оси 0x и начинает изгибаться (рис. 1б). При

$ct >> \lambda\psi(x,t)$ в области $|\ x\ | << ct$ хорошо описывается нерелятивистской формулой (10).

Аналогично решениям других релятивистских уравнений, решения псевдодифференциального уравнения (4) удовлетворяют уравнению Клейна – Гордона. (Это утверждение нетрудно проверить с помощью выражения (5) для $\psi(p,t)$.) Однако (4) обладает по сравнению с другими релятивистскими уравнениями двумя существенными отличиями. Во-первых, асимметрия пространственной и временной координат (при сохранении релятивистской инвариантности) приводит к существованию решений только с положительной энергией. Во-вторых, это уравнение, являясь частным случаем (1), допускает последовательную вероятностную интерпретацию.

Автор признателен А. Игнатенко и Т. Немченко за помощь в численных расчетах и Н. В. Норину за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смородинский Я. А., Шелепин А. Л., Шелепин Л. А. УФН, **162**, N12, 1 (1992).

[2] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4-х т., М., Мир, 1986.

[3] Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. В 2-х т., М., Мир, 1984.

[4] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1989.

[5] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981.

Поступила в редакцию 14 июля 1993 г.