

УДК 501.534.1

## ПРОТИВОФАЗНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СЦЕПЛЕННЫХ БРЮССЕЛЯТОРОВ

Е. И. Волков, В. А. Романов

*Проведен бифуркационный анализ динамики системы двух одинаковых асимметрично сцепленных брюсселяторов и найдены три типа противофазных предельных циклов с различными периодами.*

Проведенные исследования систем из двух одинаковых сцепленных осцилляторов [1 – 4] обнаружили существование несинфазных колебаний: квазипериодических, хаотических и противофазных. Будем называть противофазными такие колебания, при которых каждый осциллятор движется по одному и тому же циклу, но с разностью фаз в половину периода. Таких циклов может быть несколько. Существование противофазного предельного цикла было доказано традиционными методами [5, 6] в предположении слабой связи между осцилляторами.

Мы провели численный бифуркационный анализ модели двух одинаковых брюсселяторов, связанных только по медленной переменной. В этой работе будут рассмотрены лишь бифуркации, приводящие к противофазным предельным циклам.

*Численные методы.* Для поиска решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) применялись подпрограммы из библиотек NAG, CERN и программа интерактивного построения траекторий TraX [7]. Эти программы являются модификациями метода Рунге – Кутты – Мерсона с двойной точностью. Основные результаты по бифуркационному анализу получены с помощью программного пакета AUTO [8], предназначенного для продолжения стационарных или периодических решений систем ОДУ по параметрам. Для продолжения решения по параметру не требуется проводить интегрирование системы, так как интегрируется первоначально заданное решение. Вдоль получающихся ветвей вычисляются показатели Ляпунова (для стационарных решений) или Флоке (для предельных циклов), определяются точки бифуркаций и касательные

векторы к другим ветвям. Математические алгоритмы позволяют в ряде случаев осуществлять "переключение ветвей", а также двухпараметрическое продолжение сингулярных точек.

*Динамика двух сцепленных брасселяторов.* Рассмотрим модель, в которой два одинаковых брасселятора соединены через мембрану, проницаемую лишь для медленной переменной:

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= A - (B + 1)x_i + x_i^2 y_i, \\ dy_i/dt &= Bx_i - x_i^2 y_i + D(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

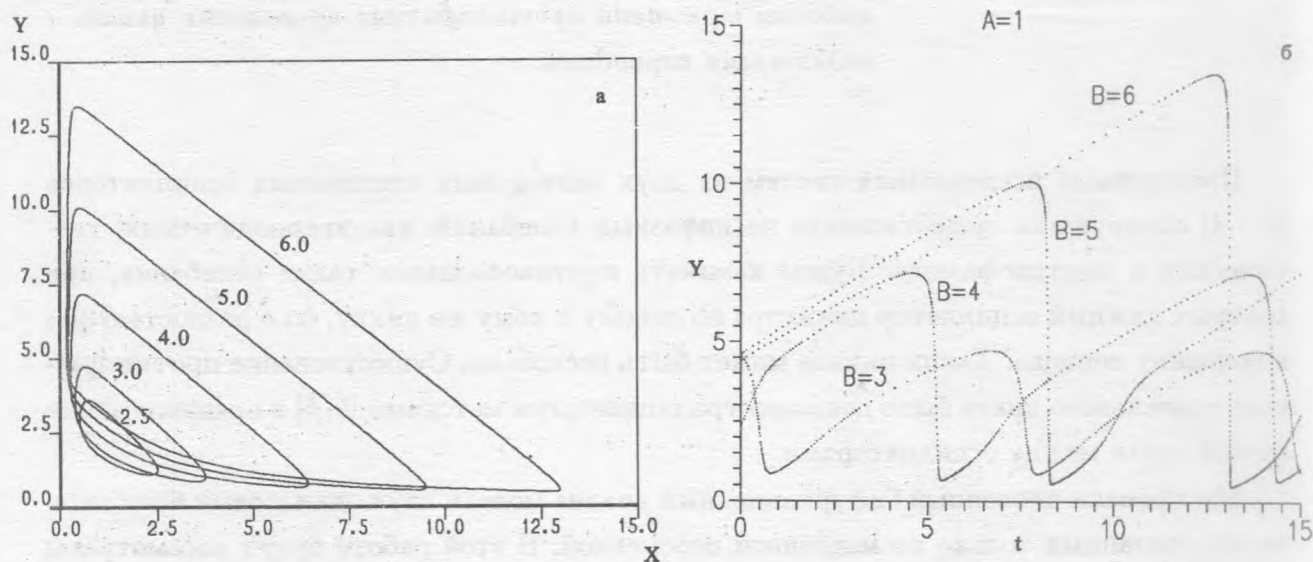


Рис. 1. Фазовые портреты (а) и развертки (б) для изолированного осциллятора при  $A = 1$ ,  $B = 2.5, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0$ .

Предельные циклы и развертки для изолированного осциллятора приведены на рис. 1. Надо отметить, что взаимодействие брасселяторов зависит не только от параметра связи  $D$ , но и от величины  $B$ , так как она определяет размер предельного цикла ( $y_2 - y_1 \simeq 0(B^2)$ ) (см. рис. 1). В уравнениях (1) исключена связь по быстрой переменной, которая может разрушить неоднородные решения.

Точка  $X_{1,2} = A$ ,  $Y_{1,2} = B/A$  является стационарным (однородным) решением (1) при любом выборе параметров. Собственные значения матрицы Ляпунова в этой точке следующие:

$$\lambda_{1,2} = (1/2) \left\{ (B - 1 - A^2) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2} \right\}, \text{ не зависят от } D,$$

$$\lambda_{3,4} = (1/2) \left\{ (B - 1 - A^2 - 2D) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2 - 2D)^2 - 4(A^2 + 2D(1 - B))} \right\}.$$

Отметим линии бифуркаций однородного решения:

$Re \lambda_{1,2} = 0$  при  $B = A^2 + 1$  (бифуркации Хопфа, при которых пара сопряженных  $\lambda$ ; пересекает мнимую ось);

$Re \lambda_{3,4} = 0$  при  $B = A^2 + 1 + 2D$  (бифуркации Хопфа - HB1);

$\lambda_4 = 0$  при  $B = A^2/2D + 1$  (простые сингулярные точки бифуркации - BP).

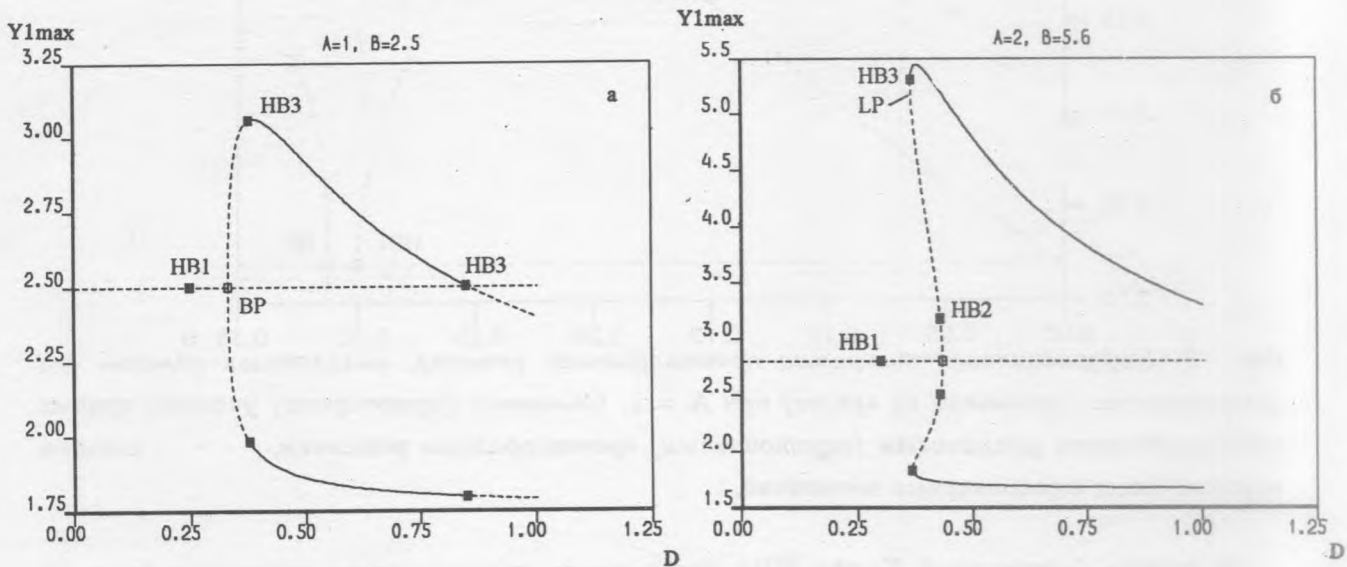


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы стационарных состояний при различных  $A$  и  $B$ . Сплошные (пунктирные) линии соответствуют устойчивым (неустойчивым) состояниям.

На рис. 2а, б показаны диаграммы продолжения однородного решения на плоскости  $(Y1 - D)$  для  $A = 1$  и  $A = 2$ , где  $Y1$  - стационарное значение медленной переменной. Символом  $\square$  обозначены бифуркации Хопфа (HB1, HB2, HB3),  $\square$  - точка пересечения ветвей BP (соответствует  $\lambda_4 = 0$ ). Точка поворота ветви - бифуркация, при которой один из показателей Ляпунова проходит через ноль, обозначена как LP (limit point). Из рис. 2б видно, что LP является границей, за которой появляются неоднородные стационарные решения. Для выявления новых решений точки HB1, HB2, HB3, BP и LP были продолжены по параметрам  $D$  и  $B$ .

*Рождение противофазных периодических решений (ПФР).* Исследование бифуркаций исходного предельного цикла и стационарных состояний выявило, помимо синфазных колебаний, которые автоматически удовлетворяют системе (1), существование еще по крайней мере трех типов противофазных колебаний.

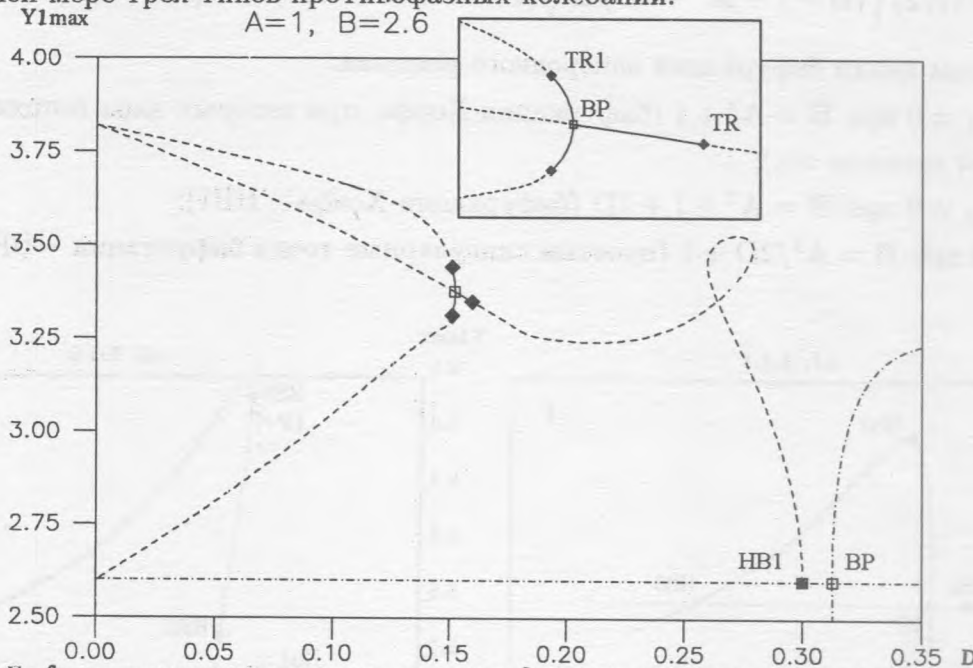


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма противофазного решения, выявляющая область его устойчивости (увеличено на врезке) при  $A = 1$ . Сплошные (пунктирные) участки кривых соответствуют устойчивым (неустойчивым) противофазным решениям,  $- \cdot - \cdot -$  ветвям неустойчивых стационарных состояний.

В точках бифуркаций Хопфа HB1 однородного стационарного состояния (рис. 2) происходит рождение неустойчивого противофазного решения. Бифуркационная диаграмма продолжения его по параметру  $D$  (рис. 3) обнаруживает бифуркацию в тор (TR: два комплексно-сопряженных показателя Флоке попадают в единичный круг), после которой ПФР приобретает устойчивость для  $D \in (0.1518 - 0.1592)$ . Эта бифуркация означает, что седловое противофазное решение рождает некоторое неустойчивое квазипериодическое решение, а само слева от TR становится устойчивым (эта бифуркация аналогична субкритической бифуркации Хопфа). Осцилляторы движутся по одному и тому же циклу, сходному с синфазным, но несколько меньшему по амплитуде — такое решение будем называть простым ПФР.

Другой интересный тип противофазного решения — "фазовая ловушка" — рождается в бифуркации удвоения периода синфазного предельного цикла (рис. 4а). Такой

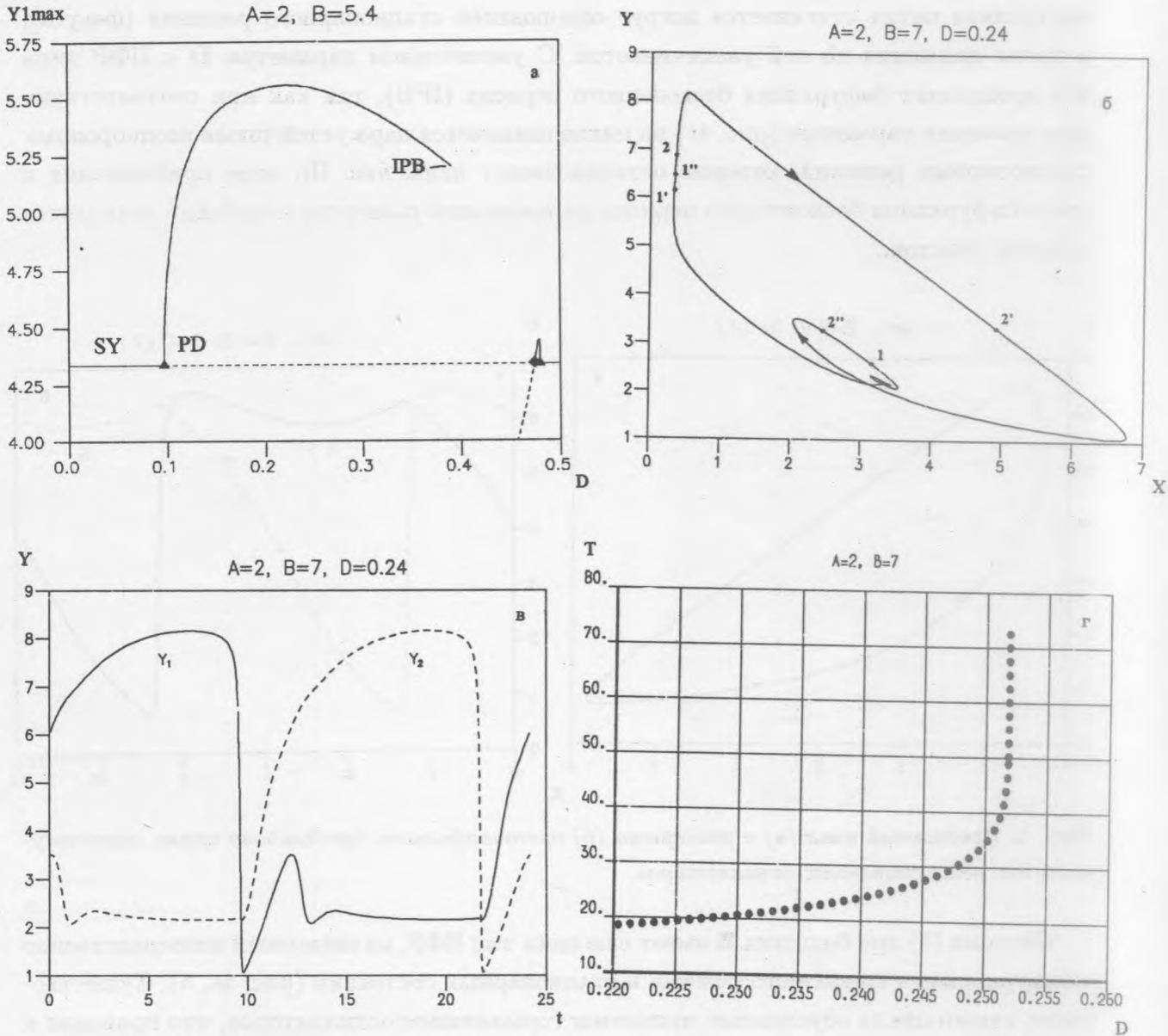


Рис. 4. а) Бифуркационная диаграмма, демонстрирующая потерю устойчивости синфазного предельного цикла через удвоение периода (PD) – появление противофазных колебаний типа ФЛ, SY – устойчивый синфазный цикл, IPB – бифуркация бесконечного периода, б) фазовый портрет, в) развертки этого решения, г) зависимость периода от силы связи.

цикл (обозначим его ФЛ) намного превосходит по амплитуде и периоду синфазный, а его характеристики сильно зависят от управляющего параметра. Характерный вид предельного цикла и развертки показаны на рис. 4б, в. При удалении от бифуркации

внутренняя петля стягивается вокруг однородного стационарного решения (фокуса), а время движения по ней увеличивается. С увеличением параметра  $D$  с ПФР типа ФЛ происходит бифуркация бесконечного периода (IPB), так как при соответствующем значении параметра (рис. 4г) на цикле появляется пара устойчивых неоднородных стационарных решений, которые останавливают движение. По мере приближения к точке бифуркации бесконечного периода на временной развертке колебаний появляется пологий участок.

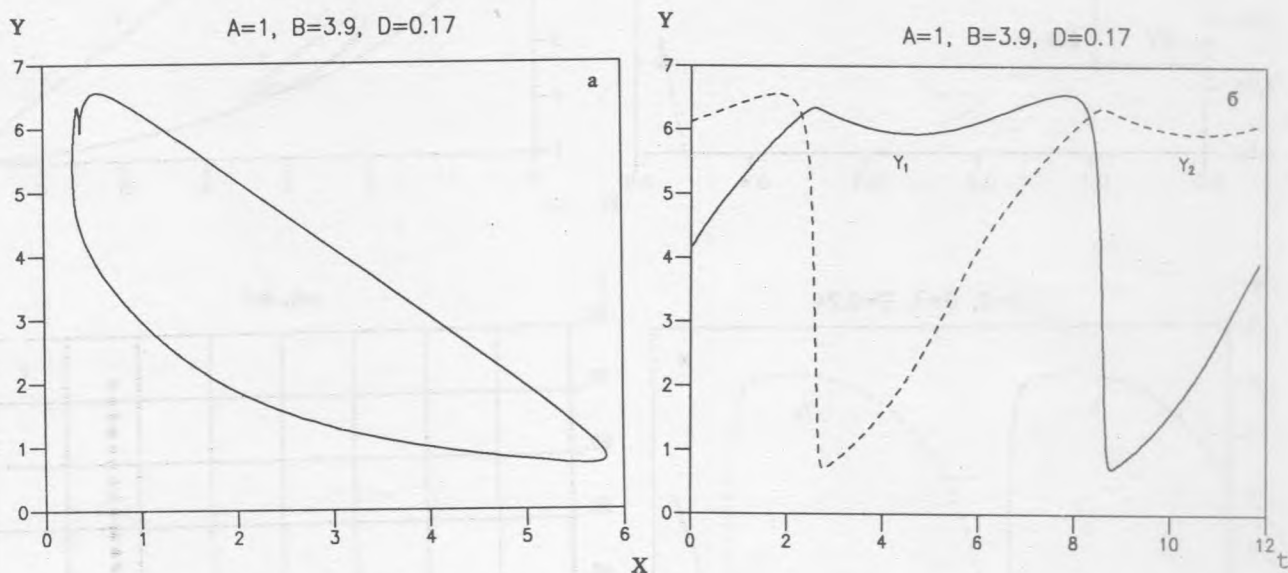


Рис. 5. Предельный цикл (а) и развертка (б) противофазного предельного цикла, характерного для релаксационных осцилляторов.

Система (1) при больших  $B$  имеет еще один тип ПФР, не связанный непосредственно с бифуркациями синфазного режима и стационарных состояний (рис. 5а, б). Существование такого цикла обусловлено взаимным торможением осцилляторов, что приводит к заметному увеличению периода колебаний. При движении по этому циклу брасселяторы два раза за период оказываются близки к неоднородным стационарным решениям. Для небольших связей скорости осцилляторов в этом положении лишь уменьшаются, не меняя направления, а при больших  $D$  осциллятор на верхней медленной части цикла немного возвращается назад, а второй его догоняет. На развертке на медленном участке образуется прогиб, а на фазовом портрете – петля (см. рис. 5).

Применение известных методов бифуркационного анализа, не ограниченных условиями малости связи, позволило показать, что уже два одинаковых осциллятора демон-

стрируют множество примеров, которые могут сосуществовать, порождая мультиритмичность и мультистационарность. Исследования границ устойчивости аттракторов на плоскости ( $D - B$ ) и роли релаксационности осциллятора будут проведены в следующей работе.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] Schreiber I. and Marek M. Phys. Letters, **91**, 263 (1982).
- [2] Kawato M. and Suzuki R. J. Theor. Biol., **86**, 547 (1980).
- [3] Aronson D. G., Doedel E. J., and Othmer H. G. Physica, **25D**, 20 (1987).
- [4] Volkov E. I. and Stolyarov M. N. Phys. Lett., **159A**, 61 (1991).
- [5] Ланда П. С. Автоколебания в системах с многими степенями свободы. Наука, М., 1979.
- [6] Linkens D. A. Bull. Math. Biol., **39**, 359 (1977).
- [7] Khibnik A. I., et al. Physica, **62D**, 360 (1993).
- [8] Doedel E. J., Keller H. G., and Kernevez J. P. J. Bifurcation and Chaos, **3**, 493 (1991).

Поступила в редакцию 14 сентября 1993 г