

УДК 501.534.1

ВЛИЯНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОСТИ НА БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СЦЕПЛЕННЫХ БРЮССЕЛЯТОРОВ

Е. И. Волков, В. А. Романов

Проведен двухпараметрический бифуркационный анализ динамики системы двух одинаковых асимметрично сцепленных брусселяторов, в которой найдены "неоднородный" и противофазные предельные циклы. Вычислены границы устойчивости неоднородных стационарных состояний и периодических аттракторов как функции силы связи и одного из свободных параметров. Показано, что релаксационность осциллятора упрощает фазовые диаграммы, уменьшая перекрытия областей существования различных решений.

Коллективное поведение нелинейных осцилляторов давно привлекает внимание исследователей как объект, позволяющий моделировать сложное поведение электрических контуров [1], ансамблей химических реакций [2, 3] и т.д. Как правило, теоретические исследования ограничены выбором слабо нелинейных и несильно связанных осцилляторов [4, 5, 9], что дает возможность применить хорошо известные методы усреднения и рассматривать лишь изменения фаз взаимодействующих осцилляторов. Однако большинство реальных химических и биологических процессов описываются релаксационными осцилляторами, векторное поле которых нельзя рассматривать как слабо нелинейное [2, 6].

Проведенные исследования систем из двух одинаковых сцепленных осцилляторов [7 - 10] обнаружили существование несинфазных колебаний: квазипериодических, хаотических и противофазных.

В данной работе проведен двухпараметрический бифуркационный анализ стационарных и периодических решений модели двух одинаковых брусселяторов, связанных

только по медленной переменной. Ранее [11] были найдены противофазные предельные циклы, а в этой работе будут рассмотрены взаимосвязи всех решений в данной системе. Изучение границ областей существования и устойчивости однородных и неоднородных решений, а именно: синфазного предельного цикла, устойчивого неоднородного стационарного состояния (НСС), пространственно неоднородного предельного цикла и противофазных колебаний (ПФК) показало, что противофазное решение более характерно для достаточно релаксационных осцилляторов.

Рассматриваемая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= A - (B + 1)x_i + x_i^2 y_i, \\ dy_i/dt &= Bx_i - x_i^2 y_i + D(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Предельные циклы и разветвки для изолированного осциллятора приведены в работе [11]. В уравнениях (1) исключена связь по быстрой переменной, которая может разрушить неоднородные решения. Из трех оставшихся свободных параметров мы фиксируем значения $A = 1$ и $A = 2$ для сравнения систем с разной степенью релаксационности.

Точка $X_{1,2} = A$, $Y_{1,2} = B/A$ является стационарным (однородным) решением при любом выборе параметров. Собственные значения матрицы Ляпунова в этой точке равны:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (1/2) \left\{ (B - 1 - A^2) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2} \right\}, \text{ не зависят от } D, \\ \lambda_{3,4} &= (1/2) \left\{ (B - 1 - A^2 - 2D) \pm \sqrt{(B - 1 - A^2 - 2D)^2 - 4(A^2 + 2D(1 - B))} \right\}. \end{aligned}$$

Отметим линии бифуркаций однородного решения: $Re \lambda_{1,2} = 0$ при $B = A^2 + 1$ (бифуркации Хопфа, при которых пара сопряженных λ_i пересекает мнимую ось); $Re \lambda_{3,4} = 0$ при $B = A^2 + 1 + 2D$ (бифуркации Хопфа - (НВ1)); $\lambda_4 = 0$ при $B = A^2/2D + 1$ (простые сингулярные точки бифуркации - (ВР)).

На рис. 2 работы [11] показаны диаграммы продолжения однородного решения на плоскости $(Y1 - D)$ для $A = 1$ и $A = 2$, где $Y1$ - стационарное значение медленной переменной. Символом \square обозначены бифуркации Хопфа (НВ1, НВ2, НВ3), \square - точка пересечения ветвей ВР, соответствует $\lambda_4 = 0$. Точка поворота ветви - бифуркация, при которой один из показателей Ляпунова проходит через ноль, обозначена как LP (limit point). Точка LP является границей, за которой появляются неоднородные стационарные решения. Точки НВ1, НВ2, НВ3, ВР и LP (диаграммы на рис. 2 работы [11])

продолжены по параметрам D и B и полученные кривые, помеченные индексом "st", показаны на рис. 1 и 2 для $A = 1$ и $A = 2$ соответственно. Пунктиром обозначены линии точек простых бифуркаций (BP), сплошными линиями – линии точек LP, бифуркаций Хопфа и других бифуркаций стационарных и периодических решений. Кривая точек НВЗ на рис. 1, 2 ограничивает область устойчивости неоднородных стационарных решений (область C).

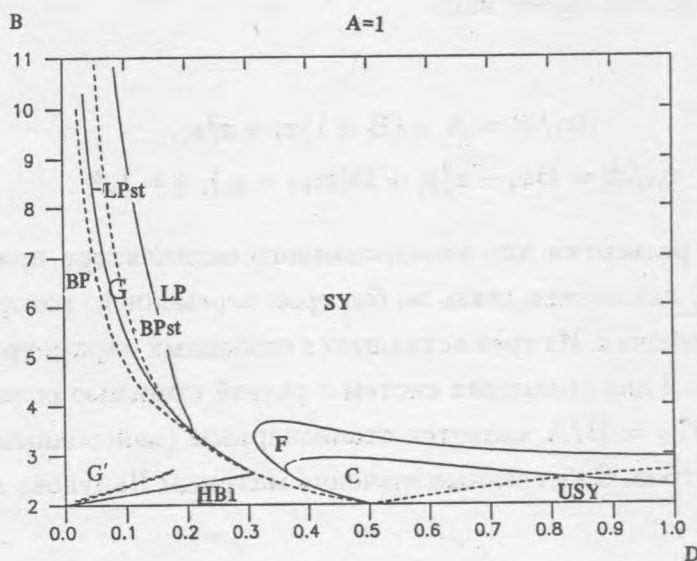


Рис. 1. Фазовая диаграмма системы (1) для $A = 1$. C – область устойчивых стационарных состояний, F – область неоднородных предельных циклов, G' – область простого противофазного решения, G – противофазный режим типа (v). Индексом "st" обозначены линии бифуркаций стационарных решений. Синфазный режим (SY) устойчив всюду кроме области, помеченной USY .

Исследование бифуркаций (описание численных методов см. в [11]) исходного предельного цикла и стационарных состояний выявило помимо синфазных колебаний, которые автоматически удовлетворяют системе (1), существование еще по крайней мере двух периодических решений.

1. *Пространственно неоднородный предельный цикл (ПНПЦ)* – такое периодическое решение системы двух связанных идентичных осцилляторов, при котором они движутся неодинаково, по разным циклам, т.е. колебания происходят вокруг пространственно

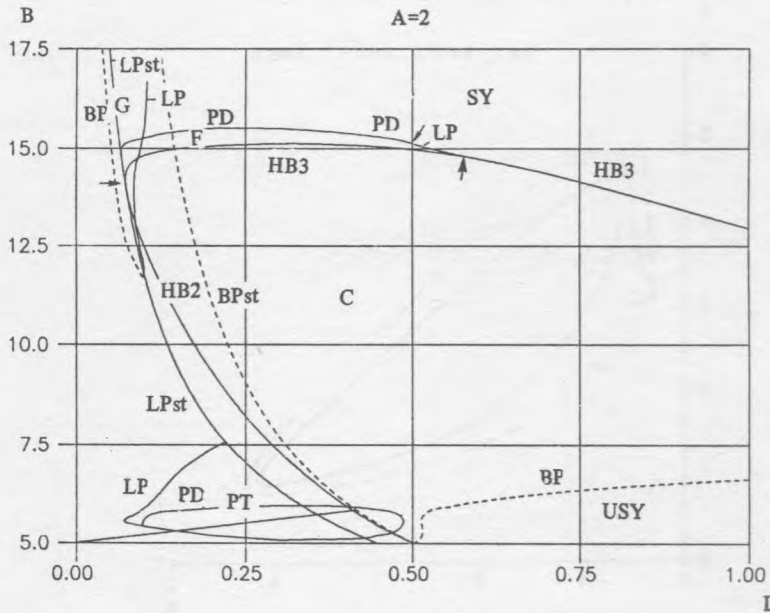


Рис. 2. Фазовая диаграмма для $A = 2$. PT – область устойчивости противофазного режима типа ФЛ, PD – область удвоения периода. Остальные обозначения те же, что и на рис. 1.

разделенных центров, и соответствующий четырехмерный предельный цикл имеет несовпадающие проекции на плоскостях $(x_1 - y_1)$, $(x_2 - y_2)$.

На рис. 3 показан вид проекций предельного цикла такого решения на плоскость $(x_1 - y_1)$. Устойчивый ПНПЦ возникает в бифуркации Хопфа при потере устойчивости неоднородного стационарного решения (точки $HB3$ на рис. 1). Поэтому этот режим (обозначим соответствующую область F) существует при значениях параметров, выбранных над областью C на плоскости $(D - B)$. С помощью пакета AUTO получены границы области на плоскости бифуркационных параметров, внутри которой ПНПЦ устойчив (рис. 1, 2). При $A = 1$ границей устойчивости решения являются точки LP , а со стороны меньших значений параметра B – точки $HB3$.

2. *Противофазные колебания (ПФК)* – колебания, при которых каждый осциллятор движется по одному и тому же циклу, но с разностью фаз 180° . В [11] приведены развертки и фазовые портреты различных ПФК: "простой" цикл (а) возникает в точках бифуркаций Хопфа $HB1$ однородного стационарного состояния. Он устойчив в узкой области G' (рис. 1). При $A = 1$, малых значениях B и при других величинах связи осцилляторов этот режим неустойчив; (б) ПФК типа "фазовая ловушка" (ФЛ)

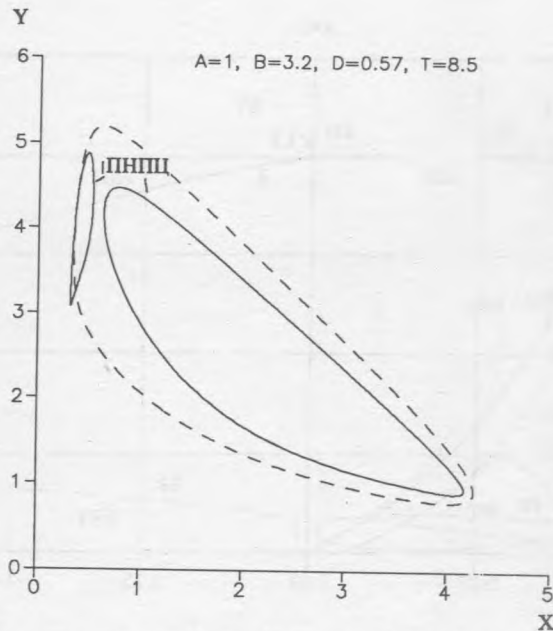


Рис. 3. Пример пространственно неоднородного предельного цикла. Показаны проекции циклов каждого осциллятора на плоскость X - Y и для сравнения приведено синфазное решение (пунктир).

рождаются в бифуркации удвоения периода синфазного предельного цикла; последний тип ПФК (в) не связан непосредственно с бифуркациями синфазного режима и стационарных состояний. Существование такого цикла обусловлено взаимным торможением осцилляторов, что приводит к заметному увеличению периода колебаний. Область его устойчивости, обозначенная G , занимает большую площадь на плоскости $(D - B)$ (рис. 1, 2). Из фазовой диаграммы видно, что область G расширяется с увеличением параметра B , несмотря на увеличение эффективного взаимодействия $D(y_2 - y_1) \simeq 0(B^2)$, которое способствует переходу в синфазный режим.

Система (1) демонстрирует и более сложные аттракторы в областях перекрывания различных режимов, которые будут рассмотрены отдельно.

В последнее десятилетие центр тяжести исследований нелинейной динамики переместился с изучения двумерных систем на объекты большей размерности. Применение известных методов исследования, не ограниченных условиями малости связи, позволило показать, что уже два одинаковых осциллятора демонстрируют множество режимов, которые могут сосуществовать, порождая мультиритмичность и мультистационарность.

Двухпараметрический анализ показал зависимость существования и устойчивости

изучаемых решений от релаксационности осцилляторов. При сравнении фазовых диаграмм на рис. 1 и 2 видно, что при большей релаксационности ($A = 1$) фазовая диаграмма проще, так как не содержит областей сосуществования несинфазных решений. С уменьшением релаксационности ($A = 2$) происходит расширение области устойчивости неоднородных стационарных состояний и появляется противофазный цикл типа ФЛ, который может перекрываться с устойчивым неоднородным стационарным состоянием. Отметим, что при $A = 2$ ПНПЦ существует лишь вблизи бифуркации Хопфа (рис. 2), имеет малый бассейн притяжения, незначительную амплитуду и малый период по сравнению с периодом изолированного осциллятора.

Большая область устойчивого противофазного цикла появляется, когда осцилляторы становятся достаточно релаксационными. По-видимому, характерна только область G для релаксационных осцилляторов, в то время как простые ПФК и противофазный режим типа ФЛ устойчивы лишь для некоторых мягких систем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Heidemann G., Bode M., and Purwins H. G. Phys. Lett., A177, 225 (1993).
- [2] Growley F. and Epstein I. J. Phys. Chem., 93, 2496 (1989).
- [3] Bar-Eli K. J. Phys. Chem., 94, 2368 (1990).
- [4] Ланда П. С. Автоколебания в системах с многими степенями свободы. Наука, М., 1979.
- [5] Linkens D. A. Bull. Math. Biol., 39, 359 (1977).
- [6] Lavenda B., Nicolis G., and Hershkovitz-Kaufman. J. Theor. Biol., 32, 283 (1971).
- [7] Schreiber I. and Marek M. Phys. Letters, 91, 263 (1982).
- [8] Kawato M. and Suzuki R. J. Theor. Biol., 86, 547 (1980).
- [9] Aronson D. G., Doedel E. J., and Othmer H. G. Physica, 25D, 20 (1987).
- [10] Volkov E. I. and Stolyarov M. N. Phys. Lett., 159A, 61 (1991).
- [11] Волков Е. И., Романов В. А., Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9 - 10, 15 (1993).

Поступила в редакцию 14 сентября 1993 г.