УДК 532.529

РАЗРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

В. В. Сутормин

Представлено аналитическое решение задачи об изменении эксцентриситета между граничными поверхностями полой микросферы из вязкой жидкости, вызванного ее равномерным движением в поле тяжести через вязкую же среду.

Математическое моделирование технологии изготовления сферических мишеней для ЛТС ставит ряд гидродинамических задач [1 – 3]. Многие из них могут быть объединены общей методологией решения [1, 2], используемой и в настоящей работе. Это особенно важно в связи с известной громоздкостью подобных задач.

При изготовлении полых микросфер сравнительно редко пользуются твердыми матрицами, позволяя природным силам (поверхностное натяжение) сформировать идеальную сферическую поверхность в газовой или жидкой средах. В этих условиях единственным долговременным и трудноустранимым фактором, нарушающим симметрию, является сила тяжести, заставляющая формирующуюся оболочку двигаться сквозь окружающую ее среду. Влияние такого движения на концентричность ограничивающих оболочку поверхностей – тема нашего исследования.

Рассмотрим постановку задачи. Пусть в начальный момент времени имеется концентрическая оболочка (r_1, r_0 – радиусы внутренней и внешней границ) из жидкости с вязкостью η и плотностью ρ. В последующие моменты она движется с установившейся скоростью в поле тяжести сквозь жидкость (газ) с вязкостью η' и плотностью ρ'. Требуется определить изменение эксцентриситета между граничными поверхностями во времени.

Решение системы гидродинамических уравнений при дипольном (по полиномам Лежандра) разложении задачи для каждой из вязких сред имеет вид [1, 2]:

$$v_r = -\sum_{i=1}^{4} \frac{2}{n_i+2}\beta_i r^{n_i}\cos\theta,$$

$$v_\theta = \sum_{i=1}^{4} \beta_i r^{n_i}\sin\theta,$$

$$P + \rho g r = -\eta \sum_{i=1}^{4} \frac{n_i^2(n_i+3)}{n_i+2}\beta_i r^{(n_i-1)}\cos\theta,$$

$$n_1 = 0,\ n_2 = -1,\ n_3 = 2,\ n_4 = -3,$$

где ось $\theta = 0$ и вектор g параллельны и противоположно направлены; v_r, v_θ – компоненты скорости в сферических координатах; P – давление в жидкости; r – текущий радиус; β_i – постоянные интегрирования, определяемые по граничным условиям.

На границах оболочки должны быть выполнены стандартные условия, физический смысл которых поясняется справа от развернутых формул. Поместим начало координат в центр внешней граничной поверхности оболочки. Помечая штрихом все величины, относящиеся к внешней среде и раскрывая компоненты тензора напряжений по определению [1], с учетом написанных выше формул получим:

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i r_0^{n_i} 2/(n_i+2) = 0\ (v_r = 0 \text{ при } r = r_0),$$

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i' r_0^{n_i} 2/(n_i+2) = 0\ (v_r' = 0 \text{ при } r = r_0),$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\beta_i - \beta_i') r_0^{n_i} = 0\ (v_\theta = v_\theta' \text{ при } r = r_0),$$

$$\beta_3' = 0\ (v_r', v_\theta' \neq \infty \text{ при } r \to \infty),$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\eta\beta_i - \eta'\beta_i') r_0^{n_i} n_i(n_i+1)/(n_i+2) = 0\ (F_\sigma = F_\sigma' \text{ при } r = r_0),$$

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i r_1^{n_i} n_i(n_i+1)/(n_i+2) = 0\ (F_\sigma = 0 \text{ при } r = r_1),$$

$$\eta \sum_{i=1}^{4} \beta_i r_1^{n_i} n_i(n_i-2)(n_i+3)/(n_i+2) - \rho g r_1^2 = 0\ (F_n = 0 \text{ при } r = r_1),$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\eta\beta_i - \eta'\beta_i') r_0^{n_i} n_i(n_i-2)(n_i+3)/(n_i+2) - g r_0^2(\rho - \rho') = 0\ (F_n = F_n' \text{ при } r = r_0),$$

где F_n, F_σ – нормальная и касательная компоненты силы, действующей на единичную поверхность.

В указанной системе отсчета скорость изменения эксцентриситета совпадает с радиальной скоростью перемещения внутренней границы: $\dot{b} = -\sum_{i=1}^{4} \beta_i r_1^{n_i} 2/(n_i+2)$.

Несмотря на пугающую громоздкость, система граничных условий довольно быстро решается простым исключением переменных, после чего $\dot{b} = A/B$, где $B \equiv 1 + \frac{3}{2}\gamma^5 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{\eta'}(1-\gamma^5)$; $A \equiv \frac{\rho g r_1^2}{3\eta}[(1-\gamma^6) - \frac{3}{2}\gamma(1-\gamma^4) + \frac{\eta}{\eta'}(1-\gamma^5)(\frac{3}{2}-\gamma)] - \frac{g r_0^2(\rho-\rho')}{6\eta'}(1-\gamma^5)$; $\gamma \equiv r_1/r_0$. Это – наиболее общий вид искомого решения.

Рассмотим важные предельные случаи.

1. Толстая оболочка ($\gamma \to 0$):

$$\dot{b} = \frac{\rho g r_1^2}{3\eta} - \frac{g r_0^2(\rho-\rho')}{6\eta'}[1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{\eta'}]^{-1};$$

а) твердая подложка ($\eta' \to \infty$):

$$\dot{b} = \frac{\rho g r_1^2}{3\eta};$$

б) разреженный газ ($\eta' \to 0,\ \rho' \to 0$):

$$\dot{b} = \frac{\rho g r_1^2}{3\eta} - \frac{2\rho g r_0^2}{9\eta}.$$

2. Тонкая оболочка ($h/r_1 << 1$, где $h \equiv r_0 - r_1$):

$$\dot{b} = \left\{\frac{\rho g r_1^2}{3\eta}\left[2\left(\frac{h}{r_1}\right)^3 + \frac{\eta}{\eta'}\left(\frac{h}{r_1}\right)\right] - \frac{(\rho-\rho')g r_0^2}{3\eta'}\left(\frac{h}{r_1}\right)\left(1 + 2\left(\frac{h}{r_1}\right)\right)\right\}\left[1 + \frac{3\eta}{\eta'}\left(\frac{h}{r_1}\right)\right]^{-1};$$

а) твердая подложка:

$$\dot{b} = \frac{\rho g r_1^2}{3\eta} 2\left(\frac{h}{r_1}\right)^3;$$

б) разреженный газ:

$$\dot{b} = -\frac{2\rho g r_1^2}{9\eta}\left(\frac{h}{r_1}\right).$$

Изменение эксцентриситета оболочки можно интерпретировать как наложение двух противоположно направленных движений газового пузыря внутри оболочки. С одной стороны, происходит обычное всплывание пузыря вверх, с другой, пузырь движется вниз (если $\rho - \rho' > 0$) под действием принудительной циркуляции жидкой фазы, вызванной трением о движущуюся внешнюю среду. Например, при $\eta' \to \infty$ (твердая подложка снаружи) последняя составляющая полностью исчезает, и мы получаем известные по [2] результаты. В других случаях имеют место обе составляющие движения (даже тогда, когда параметры внешней среды исчезают, обращаясь в ноль, т.к. скорость движения оболочки сквозь среду при этом стремится к бесконечности). Движение газового пузыря вниз почти всегда превалирует.

Остановимся на технологии изготовления микросфер. Принятый в ФИАН метод получения полых микросфер заключается в том, что частицу твердой фазы, содержащую в своем составе газообразующие компоненты, пробрасывают через вертикальную трубчатую печь, где она размягчается и вспенивается. На первом этапе термообработки имеется достаточно причин для отклонения формы образующейся оболочки от идеальной. Когда же выделение газа из стенок оболочки почти прекращается, источник высоких гармоник искажения исчезает, и силы поверхностного натяжения вместе с силами вязкого трения становятся способными стереть все образованные ранее дефекты К сожалению, стадия стабилизации не може́т быть растянута во времени слишком долго, так как за время

$$\tau = 9\eta/2\rho g r_1$$

тонкая оболочка (случай 2б) необратимо разрушается.

Описанные в [1, 3] механизмы симметрирования на первой гармонике в сочетании с результатами настоящей работы дают возможность обосновано выбирать по указанному методу технологический режим, а также создавать принципиально новые технологии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сутормин В. В. Препринт ФИАН N105, М., 1988.

[2] Сутормин В. В. Препринт ФИАН N147; М., 1988.

[3] Сутормин В. В. Препринт ФИАН N220, М., 1988.

Поступила в редакцию 20 сентября 1993 г.