УДК 530.1

УСИЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА НЕРАВНОВЕСНОЙ БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

С. А. Решетняк, В. А. Щеглов

Показано, что в открытой неравновесной бистабильной системе, подверженной воздействию периодической внешней силы и шума, в определенных частотных интервалах наблюдается усиленный отклик по сравнению с откликом в нешумящей системе.

В работе речь идет об открытом в [1] явлении "стохастического резонанса", сущность которого состоит в том, что в результате взаимодействия сигнала и шума, протекающего в открытой нелинейной системе, на ее выходе обнаружено аномальное поведение отношения S/N сигнал-шум. Аномалия проявляется в росте отношения S/N с увеличением интенсивности шума D на входе системы. При дальнейшем увеличении D отношение S/N достигает максимума и затем падает. Данный эффект подтвержден экспериментально в кольцевом лазере с помещенным в резонатор акустооптическим модулятором [2], а также путем численного моделирования [3]. В известных нам теоретических работах [4 – 6] он проанализирован для низких частот сигнала со случайно распределенной начальной фазой.

В данной работе отклик системы на внешнее воздействие найден практически для всей области частот сигнала, фаза которого полагается фиксированной. Анализ проводится для малых внешних полей в рамках первого порядка нестационарной теории возмущений. Ниже будет показано, что в определенных интервалах частот сигнала отклик системы усилен по отношению к отклику системы без учета шума.

Пусть нелинейная система описывается следующим уравнением Ланжевена для физической величины η, называемой ниже параметром порядка:

$$\dot{\eta} + U'(\eta) = F_0 \cos(\omega t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $U(\eta) = -\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4$ – потенциал бистабильной системы, $\pm\eta_0$ – точки устойчивого равновесия, $\eta_0 = \sqrt{a/b}$, $U_0 = a^2/4b$ – высота потенциального барьера, $\xi(t)$ – белый шум, $<\xi(t)>= 0$, $<\xi(t)\xi(t')>= 2D\delta(t-t')$.

Внешняя сила приводит к вынужденным колебаниям параметра порядка вблизи равновесной точки. Анализ (1) без $\xi(t)$ для $\Delta\eta = \eta - \eta_0 << \eta_0$ показывает, что

$$\Delta\eta = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^2 + 4a^2}}\cos(\omega t - \varphi), \tag{2}$$

где $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega}{2a}$, $(2a)^{-1}$ – динамическое время релаксации, $t >> a^{-1}$.

Для учета шума будем анализировать кинетическое уравнение для функции распределения (ФР) $f(\eta, t)$, эквивалентное (1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + F_0\cos(\omega t)\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U'f + D\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \hat{L}f \tag{3}$$

$$f\Big|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*), \ U'f + D\frac{\partial f}{\partial \eta}\Big|_{\eta\to\pm\infty} = 0, \tag{4}$$

где η_* – начальное значение параметра порядка, $\delta(\eta)$ – дельта-функция.

Решение (3) для малой амплитуды F_0 ищем в виде: $f = \rho + \tilde{\rho}$, где $\tilde{\rho} \sim F_0$. Такое разбиение удобно, так как ФР ρ и $\tilde{\rho}$ описывают отклик системы на шум и сигнал соответственно. Уравнения для ФР имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \hat{L}\rho, \ \rho\,|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + F_0\cos(\omega t)\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \hat{L}\tilde{\rho}, \ \tilde{\rho}\,|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Граничные условия для (5) и (6) совпадают с (4).

Решение уравнения (5) хорошо известно:

$$\rho = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta_*)\varphi_n(\eta)\exp(-\mu_n t), \tag{7}$$

где $\rho_0 = N\exp(-U/D)$ – нормированное на единицу стационарное решение (5). Собственные функции (СФ) $\varphi_n(\eta)$ и собственные значения (СЗ) μ_n являются решениями следующей краевой задачи:

$$D\frac{d}{d\eta}\left(\rho_0\frac{d\varphi_n}{d\eta}\right) = -\mu_n\rho_0\varphi_n, \ \rho_0\frac{d\varphi_n}{d\eta}\Big|_{\eta\to\pm\infty} = 0. \tag{8}$$

В (7) СЗ занумерованы в порядке возрастания по величине $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \mu_2 < ...$, а соответствующие им СФ $\varphi_0 \equiv 1, \varphi_1, \varphi_2, ...$ удовлетворяют условиям ортогональности и полноты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \varphi_n \varphi_m d\eta = \delta_{nm}, \; \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)\varphi_n(\eta) = \delta(\eta - \xi). \tag{9}$$

Из-за симметрии потенциала СФ обладают следующими свойствами:

$$\varphi_{2n}(-\eta) = \varphi_{2n}(\eta), \; \varphi_{2n+1}(-\eta) = -\varphi_{2n+1}(\eta).$$

Алгоритм построения СФ и СЗ представлен в [7], согласно которому для $U_0 >> D$

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} a \exp(-U_0/D), \; \varphi_1(\eta) \simeq \frac{\mu_1}{D} \int_0^{\eta} \rho_0^{-1} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \rho_0 d\varphi = \mathrm{erf}(z), \tag{10}$$

где $\mathrm{erf}(z)$ – интеграл ошибок, $z = \sqrt{\frac{a}{2D}}\eta$.

Вследствие крайней малости μ_1 для моментов времени $t >> \mu_2^{-1}$ ($\mu_2 \sim a$) реализуется метастабильная стадия релаксации, для которой в (7) главную роль играют два первые члена, поэтому отклик системы при воздействии на нее шума определяется формулой

$$< \eta >= \int_{-\infty}^{\infty} \eta \rho d\eta = \eta_0 \mathrm{erf}(z_*) \exp(-\mu_1 t), \; z_* = \sqrt{\frac{a}{2D}} \eta_*. \tag{11}$$

Мы будем интересоваться начальными условиями $| z_* |> 1$. Тогда для моментов времени $\mu_1^{-1} << t << \mu_2^{-1}$ отклик $< \eta >= \eta_0$ для $\eta_* > 0$ и $< \eta >= -\eta_0$ для $\eta_* < 0$.

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \varphi_n(\eta), \tag{12}$$

где коэффициенты C_n удовлетворяют следующим уравнениям:

$$C_n + \mu_n C_n = F_0 \cos(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n' \rho d\eta, \; C_n(0) = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим решение (13) для C_n с нечетными индексами, так как только они дают ненулевой вклад в $< \tilde{\eta} >= \int_{-\infty}^{\infty} \eta \tilde{\rho} d\eta$. Учитывая, что для $t >> \mu_2^{-1}$ в правой части (13) в силу симметрии СФ φ_1 можно заменить ρ на ρ_0, имеем

$$C_k = \frac{F_0 \mu_k M_k}{D(\omega^2 + \mu_k^2)} \left[\mu_k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - \mu_k \exp(-\mu_k t) \right], \tag{14}$$

где $k = 2n+1$, $M_k = \frac{D}{\mu_k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k' \rho_0 d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta \varphi_k \rho_0 d\eta$.

Рассмотрим случай низких частот ($\omega << \mu_1$) и достаточно большие моменты времени наблюдения ($t >> \mu_1^{-1}$). Здесь

$$C_{2n+1} = \frac{F_0}{D} \cos(\omega t) M_{2n+1}, \; < \tilde{\eta} > = \frac{F_0}{D} \cos(\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2.$$

Добавляя дающие нулевой вклад члены с четными индексами и используя свойство полноты (9), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \rho_0(\xi) d\xi = \eta_0^2 + \frac{D}{2a} \simeq \eta_0^2.$$

Отсюда

$$< \tilde{\eta} > = \kappa \frac{F_0}{2a} \cos(\omega t), \tag{15}$$

где $\kappa = \frac{8U_0}{D}$ – коэффициент, показывающий во сколько раз отклик (15) превышает (2) в пределе низких частот. Можно показать, что для более ранних моментов времени $\mu_1^{-1} << t << \mu_2^{-1}$ усиление отсутствует.

Обратимся к случаю промежуточных частот $\mu_1 << \omega << \mu_2$ и времен наблюдения $t >> \mu_2^{-1}$. Здесь

$$C_1 = \tfrac{F_0}{D} \tfrac{\mu_1}{\omega} M_1 \sin(\omega t), \; C_{2n+1} = \tfrac{F_0}{D} M_{2n+1} \cos(\omega t),$$
$$< \tilde{\eta} > = \tfrac{F_0}{D} \tfrac{\mu_1}{\omega} M_1^2 \sin(\omega t) + \tfrac{F_0}{D} \cos(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^2 - M_1^2 = \eta_0^2 + \tfrac{D}{2a} - \eta_0^2 = \tfrac{D}{2a}. \tag{16}$$

Отсюда

$$< \tilde{\eta} > = \sqrt{1+\gamma^2} \frac{F_0}{2a} \cos(\omega t - \varphi), \; \gamma = \kappa \frac{\mu_1}{\omega}, \; \mathrm{tg}\varphi = \gamma. \tag{17}$$

Из (17) следует, что шум изменяет не только амплитуду, но и фазу сигнала на выходе бистабильной системы. Видно, что в области частот $\mu_1 << \omega << \kappa\mu_1$ амплитуда увеличена в γ раз по сравнению с (2), а фаза сигнала сбита на $\pi/2$. В области $\kappa\mu_1 << \omega << \mu_2$ формула (17) совпадает с (2).

Рассмотрим наконец случай высоких частот $\omega >> \mu_2$ и $t >> \mu_2^{-1}$. Пренебрегая в (14) экспонентой, имеем

$$< \tilde{\eta} > = \frac{F_0}{D}\left[S_1 \sin(\omega t) + S_2 \cos(\omega t)\right],$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega \mu_n}{\omega^2 + \mu_n^2} M_n^2, \; S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\omega^2 + \mu_n^2} M_n^2.$$

Главный вклад в суммы S_1 и S_2 дают первые несколько членов, поэтому для достаточно больших ω их можно представить в виде:

$$S_1 \simeq \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n M_n^2 = -\frac{D}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \varphi_n \rho_0 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \rho_0' d\xi = \frac{D}{\omega},$$

$$S_2 \simeq \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 M_n^2 = \frac{D^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0' \varphi_n d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0' \varphi_n d\xi = \frac{2aD}{\omega^2}.$$

Для рассматриваемых частот сигнала $S_1 >> S_2$, поэтому

$$< \tilde{\eta} > = \frac{F_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{18}$$

и сигнал (18) на выходе системы совпадает с (2).

Формулы (15) и (18) можно получить непосредственно из анализа уравнения (6). Для квазистатических изменений внешней силы ($\omega << \mu_1$) членом $\partial\tilde{\rho}/\partial t$ в (6) можно пренебречь и рассмотреть уравнение

$$D \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \eta} + U' \tilde{\rho} = F_0 \cos(\omega t) \rho_0.$$

Полагая $\tilde{\rho} = \rho_0 \tilde{\varphi}$, находим

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 + \frac{F_0}{D} \eta \cos(\omega t), \; < \tilde{\eta} > = \frac{F_0}{D} \eta_0^2 \cos(\omega t) = \kappa \frac{F_0}{2a} \cos(\omega t).$$

В другом предельном случае ($\omega >> a$) можно пренебречь правой частью (6), так как диффузия параметра порядка и его регулярное движение являются медленными процессами. Поэтому решение (6) имеет вид

$$\tilde{\rho} = -\frac{F_0}{\omega} \sin(\omega t) \frac{\partial \rho}{\partial \eta},$$

используя котрое приходим к формуле (18):

$$< \tilde{\eta} > = -\frac{F_0}{\omega}\sin(\omega t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\eta = \frac{F_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

В промежуточной области частот необходимо учитывать все члены уравнения (6).

Таким образом, в открытой бистабильной системе шум может приводить к усиленному отклику на внешнюю периодическую силу. В области низких частот $\omega << \mu_1$ для обнаружения усиления требуются большие времена наблюдения $t > \mu_1^{-1}$. В области частот $\mu_1 << \omega << \kappa\mu_1$ усиление формируется быстро, $t > \mu_2^{-1}$, а корреляция между сигналом и шумом наблюдается вблизи частоты μ_1 перескоков через потенциальный барьер при воздействии шума на систему. Как показывает анализ, полученные результаты применимы для внешних полей $F_0 << \sqrt{aD}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Benzi R., Sutera S., Vulpiani A., J. Phys. A., **14**, L453 (1981).

[2] McNamara B., Wiesenfeldt K., Roy R., Phys. Rev. Lett., **60**, 2626 (1988).

[3] Debanath G., Zhou T., Moss F., Phys. Rev. A., **39**, 4323 (1989).

[4] Fox R., Phys. Rev. A., **39**, 4148 (1989).

[5] Presilla G., Marchesoni F., Grammaitoni L., Phys. Rev. A., **40**, 2105 (1989).

[6] Jung P., Z. Phys. B., **76**, 521 (1989).

[7] Решетняк С. А., Харчев С. М., Шелепин Л. А., Труды ФИАН, **173**, 121 (1986).

Поступила в редакцию 10 декабря 1993 г.