УДК 530.1

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТКЛИКА БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ШУМ

С. А. Решетняк, В. А. Щеглов

Найдено отношение сигнал-шум на выходе открытой бистабильной системы, на основе которого проанализирован известный в научной литературе эффект стохастического резонанса.

Настоящая работа является продолжением [1], где основное внимание было уделено определению реакции открытой нелинейной системы на воздействие слабого периодического сигнала. В отличие от [1] в данной работе найден отклик системы на воздействие шума и определено отношение сигнал-шум S/N. Проведенный анализ позволил объяснить аномальное поведение S/N на выходе бистабильной системы, получившее в литературе название стохастический резонанс [2].

Реакция системы при воздействии на нее шума определяется средним значением $<\eta>$ параметра порядка. Поэтому будем интересоваться решением следующего кинетического уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(U'\rho + D\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right) = -\frac{\partial J}{\partial\eta} \tag{1}$$

$$\rho\,|_{t=0} = \delta(\eta-\eta_*),\ J|_{\eta\to\pm\infty} = 0,$$

где $U = -\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4$ – потенциал бистабильной системы с точками $\pm\eta_0$ устойчивого равновесия, $\eta_0 = \sqrt{a/b}$, η_* – начальное значение.

Решение (1) представимо в виде ряда по собственным функциям (СФ) $\varphi_n(\eta)$ и соответствующим им собственным значениям (СЗ) μ_n краевой задачи

$$D\frac{d}{d\eta}\left(\rho_0\frac{d\varphi_n}{d\eta}\right) = -\mu_n\rho_0\varphi_n,\ \ \rho_0\frac{d\varphi_n}{d\eta}\bigg|_{\eta\to\pm\infty} = 0, \tag{2}$$

где ρ_0 – нормированное на единицу стационарное решение (1), и имеет вид

$$\rho = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta_*)\varphi_n(\eta)\exp(-\mu_n t). \tag{3}$$

Подставляя в (3) представление экспоненты

$$\exp(-\mu t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\omega t)}{\omega^2+\mu^2}d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu\cos(\omega t)}{\omega^2+\mu^2}d\omega,$$

приходим к формуле для отклика системы на шум:

$$< \eta > = \int_{-\infty}^{\infty} \eta\rho d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} n_S(\omega)\sin(\omega t)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} n_C(\omega)\cos(\omega t)d\omega, \tag{4}$$

где введены спектральные плотности

$$n_S(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+\mu_n^2}\varphi_n(\eta_*)M_n,\ \ M_n = \int_{-\infty}^{\infty}\eta\varphi_n\rho_0 d\eta \tag{5}$$

$$n_C(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\omega^2+\mu_n^2}\varphi_n(\eta_*)M_n. \tag{6}$$

Проанализируем сначала случай низких частот $\omega << \mu_1$. Здесь формула (6) принимает вид:

$$n_C(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}\varphi_n(\eta_*)M_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\rho_0 G(\eta,\eta_*)d\eta, \tag{7}$$

где $G(\eta,\eta_*) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}\varphi_n(\eta_*)\varphi_n(\eta)$ – функция Грина, удовлетворяющая следующему уравнению

$$D\frac{d}{d\eta}\left[\rho_0\frac{dG}{d\eta}(\eta,\eta_*)\right] = -\delta(\eta-\eta_*) + \rho_0(\eta),\ \ \rho_0\frac{dG}{d\eta}\bigg|_{\eta\to\pm\infty} = 0. \tag{8}$$

Решая (8), находим явный вид функции Грина с точностью до произвольной постоянной:

$$G(\eta,\eta_*) = D^{-1}\begin{cases} A(\eta) + B(\eta_*), & \eta > \eta_* \\ A(\eta_*) + B(\eta), & \eta < \eta_* \end{cases} \tag{9}$$

$$A(\eta) = \int_\eta^\infty \rho_0^{-1}d\xi\int_\xi^\infty \rho_0 d\varphi,\ B(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta}\rho_0^{-1}d\xi\int_{-\infty}^{\xi}\rho_0 d\varphi,\ A(0) = B(0).$$

Подставляя (9) в (7), имеем

$$n_C(\omega) = \frac{2}{\pi D}\int\limits_{-\eta_*}^{\eta_*}\rho_0^{-1}d\xi\int\limits_{\xi}^{\infty}\rho_0 d\varphi\int\limits_{\xi}^{\infty}\eta\rho_0 d\eta \simeq \frac{2\eta_0}{\pi\mu_1}\mathrm{erf}(z_*), \tag{10}$$

где $z_* = \sqrt{\frac{a}{2D}}\eta_*$, $\mathrm{erf}(z)$ – интеграл ошибок.

Обратимся к анализу промежуточной области частот и представим формулы (5) и (6) в виде:

$$n_S(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega}\varphi_1(\eta_*)M_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\omega}{\mu_n^2}\varphi_n(\eta_*)M_n\right], \tag{11}$$

$$n_C(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mu_1}{\omega^2}\varphi_1(\eta_*)M_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\varphi_n(\eta_*)M_n\right]. \tag{12}$$

Найдем сначала спектральную плотность (12). Заметим, что сумма в (12) определяется (7) без учета члена с $n = 1$. Принимая во внимание равенство, вытекающее из (2),

$$\varphi_1 = \frac{\mu_1}{D}\int\limits_0^{\eta}\rho_0^{-1}d\xi\int\limits_{\xi}^{\infty}\varphi_1\rho_0 d\varphi,$$

имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n^{-1}\varphi_n(\eta_*)M_n = \frac{\eta_0}{\mu_1}\mathrm{erf}(z_*) - \frac{2}{D}\varphi_1(\eta_*)\int\limits_0^{\infty}\rho_0^{-1}d\xi\int\limits_{\xi}^{\infty}\varphi_1\rho_0 d\varphi\int\limits_{\xi}^{\infty}\eta\rho_0 d\eta. \tag{13}$$

Для оценки интеграла в (13) разобьем область интегрирования на два отрезка: $[0, \eta_0]$ и $[\eta_0, \infty]$. Интеграл по первому отрезку компенсируется первым членом в (13). Главный вклад в интеграл по второму отрезку дает область интегрирования вблизи точки η_0. Поэтому, полагая здесь $U(\eta) \sim a(\eta - \eta_0)^2$ и переходя к сферическим координатам, получаем:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n^{-1}\varphi_n(\eta_*)M_n \simeq -\frac{2\eta_0}{D}\varphi_1(\eta_*)\int\limits_{\eta_0}^{\infty}\rho_0^{-1}\left[\int\limits_{\xi}^{\infty}\rho_0 d\eta\right]^2 d\xi = -\frac{\ln 2}{4a}\eta_0\mathrm{erf}(z_*). \tag{14}$$

При этом здесь учтено, что хорошим приближением для СФ $\varphi_1(\eta)$ является $\mathrm{erf}(z)$ [3].

Отсюда

$$n_C(\omega) = \frac{2\eta_0}{\pi}\left(\frac{\mu_1}{\omega^2} - \frac{\ln 2}{4a}\right)\mathrm{erf}(z_*), \tag{15}$$

где второй член в скобках (15) по порядку величины совпадает с μ_2^{-1} [3].

В рассматриваемой области частот сумма в (11) существенно меньше суммы в (12), поэтому

$$n_S(\omega) = \frac{2}{\pi\omega}\varphi_1(\eta_*)M_1 = \frac{2\eta_0}{\pi\omega}\mathrm{erf}(z_*). \tag{16}$$

Для расчета спектральной плотности в области высоких частот $\omega >> \mu_2$ заметим, что сумма (5) определяется в основном несколькими первыми членами ряда и ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} n_S(\omega) \simeq \tfrac{2}{\pi\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\eta_*)M_n = \tfrac{2}{\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\eta_*)\varphi_n(\eta)d\eta = \\ = \tfrac{2}{\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\delta(\eta-\eta_*)d\eta = \tfrac{2\eta_*}{\pi\omega}. \end{aligned} \tag{17}$$

Перейдем теперь к отношению S/N сигнал-шум на выходе бистабильной системы. Для этого воспользуемся откликом системы на внешнюю периодическую силу, полученным в [1]. Если через $\Delta\omega$ обозначить ширину контура линии, то средняя амплитуда отклика системы на шум для сигнала $S\cos(\omega t)$ есть $N(\omega) =\mid n_C(\omega) \mid \Delta\omega$. Так как отклик определяется разностью $< \eta > -\eta_0$, то постоянное слагаемое η_0 дает вклад в спектральную плотность $n_S(\omega)$, поэтому средняя амплитуда отклика системы на шум в случае сигнала $S\sin(\omega t)$ есть $N(\omega) =\mid n_S(\omega) - 2\eta_0/\pi\omega \mid \Delta\omega$. Приведем отношение S/N для всех рассмотренных частотных интервалов в случае $z_* > 1$.

В области низких частот $\omega << \mu_1$:

$$\begin{aligned} < \tilde{\eta} >= S\cos(\omega t),\ S = \kappa\tfrac{F_0}{2a},\ \kappa = \tfrac{8U_0}{D},\ t >> \mu_1^{-1}, \\ \tfrac{S}{N} = \tfrac{2\sqrt{2}F_0}{\Delta\omega\eta_0}\tfrac{U_0}{D}\exp\left(-\tfrac{U_0}{D}\right) \sim \tfrac{1}{D}\exp\left(-\tfrac{U_0}{D}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

где U_0 – высота потенциального барьера.

В частотном интервале $\mu_1 << \omega << \kappa\mu_1$:

$$\begin{aligned} < \tilde{\eta} >= S\sin(\omega t),\ S = \kappa\tfrac{\mu_1}{\omega}\tfrac{F_0}{2a},\ t >> \mu_2^{-1}, \\ \tfrac{S}{N} = \tfrac{2F_0\eta_*}{\Delta\omega\eta_0}\sqrt{\tfrac{\pi a}{D}}\tfrac{U_0}{D}\exp\left(-\tfrac{U_0}{D} + \tfrac{a\eta_*^2}{2D}\right) \sim \tfrac{1}{D^{3/2}}\exp\left(-\tfrac{U_0}{D}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Для частот, удовлетворяющих неравенству $\kappa\mu_1 << \omega << \sqrt{\mu_1\mu_2}$:

$$< \tilde{\eta} >= S\cos(\omega t),\ S = \frac{F_0}{2a},\ t >> \mu_2^{-1},$$
$$\frac{S}{N} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\frac{F_0\omega^2}{\Delta\omega\eta_0 a^2}\exp\left(-\frac{U_0}{D}\right). \quad (20)$$

Для частот, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{\mu_1\mu_2} << \omega << \mu_2$:

$$< \tilde{\eta} >= S\cos(\omega t),\ S = \frac{F_0}{2a},\ t >> \mu_2^{-1},$$
$$\frac{S}{N} = \frac{\pi}{\ln 2}\frac{F_0}{\Delta\omega\eta_0}. \quad (21)$$

В области высоких частот сигнала $\omega >> \mu_2$:

$$< \tilde{\eta} >= S\sin(\omega t),\ S = \frac{F_0}{\omega},\ t >> \mu_2^{-1},$$
$$\frac{S}{N} = \frac{\pi F_0}{2\Delta\omega\eta_0}. \quad (22)$$

Как следует из формул (18) и (19), стохастический резонанс реализуется как раз в тех частотных интервалах, где наблюдаем усиленный отклик системы на внешнее поле. В частотном интервале (20) отношение S/N велико из-за аномально малой интенсивности шума ($N \sim \mu_1$), что, на наш взгляд, связано с перекачкой энергии шума из данного частотного интервала в те, где происходит усиление. Формула (19) показывает, что корреляция между сигналом и шумом формируется очень быстро ($t \sim \mu_2^{-1}$) вблизи первого СЗ μ_1 или частоты Крамерса в отличие от низкочастотного случая ($t \sim \mu_1^{-1}$). Из (19) также следует зависимость S/N от начальных условий. Зависимость S/N от D совпадает с обнаруженным ранее [2] поведением отношения сигнал-шум.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Решетняк С. А., Щеглов В. А., Краткие сообщения по физике ФИАН, N 11-12, 37 (1993).

[2] Benzi R., Sutera S., Vulpiani A., J. Phys. A., **14**, L453 (1981).

[3] Решетняк С. А., Харчев С. М., Шелепин Л. А., Труды ФИАН, **173**, 121 (1986).

Поступила в редакцию 10 декабря 1993 г.