Краткие сообщения по физике № 3,4 — 1992 г.

УДК 530.145

О КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ЗАМКНУТЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

А. С. Бруев

Рассмотрен пример потенциального барьера, для которого уравнение Шредингера имеет точное решение с граничными условиями, соответствующими состояниям, описываемым с помощью неустойчивых замкнутых траекторий, проходящих вблизи вершины потенциального барьера.

Для задачи о туннелировании частицы через потенциальный барьер, помимо резонансов формы, возникающих из-за туннелирования через потенциальный барьер, существуют резонансы, обусловленные неустойчивыми замкнутыми траекториями, проходящими вблизи вершины потенциального барьера /1/. Характерные времена, связанные с мнимыми частями комплексных энергий, для таких состояний определяют характерные времена нахождения частицы вблизи точки неустойчивого равновесия /2, 3/. Поэтому эти времена представляют интерес и в связи с расчетами характерных времен туннелирования через потенциальные барьеры /4/.

Рассмотрим отмеченные резонансы для сферически-симметричного потенциального барьера $U(r) = -U_0[\exp(-2\alpha(r - r_0)/r_0) - \xi\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)]$, где U_0, α и r_0 — положительные параметры. Уравнение Шредингера (УШ) для s-волны при замене* $z = \pm i(2r_0/\alpha)U_0^{1/2}\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)$, $\chi(r) = z^{\pm ir_0E^{1/2}/\alpha}\exp(-z/2)u(z)$ может быть приведено к стандартному вырожденному гипергеометрическому уравнению. Соответственно для линейно-независимых решений УШ имеем

$$\chi(r) = [\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)]^{\pm ir_0E^{1/2}/\alpha}\exp[\mp ir_0/\alpha U_0^{1/2}\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)] \times$$
$$\times M[1/2 \pm ir_0E^{1/2}/\alpha \mp i\xi r_0U_0^{1/2}/2\alpha,\ 1 \pm 2ir_0E^{1/2}/\alpha,\ \pm i(2r_0U_0^{1/2}/\alpha)\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)],$$

где $M(a, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Для рассматриваемого потенциала асимптотики УШ при $r \gg r_0$ и $r \ll r_0$ имеют вид волн, приходящих или уходящих от потенциального барьера

---

* Используется система единиц, в которой $2m = \hbar = 1$.

$$\chi(r) \sim \exp\,(\pm\, iE^{1/2}(r - r_0)/r_0), \quad r \gg r_0,$$

$$\chi(r) \sim \exp\,[\pm\, i(U_0^{1/2} r_0/\alpha)\exp(-\alpha(r - r_0)/r_0)], \quad r \ll r_0.$$

Квазистационарные состояния с комплексными энергиями, соответствующие неустойчивым замкнутым траекториям, проходящим вблизи вершины потенциального барьера, возникают при наложении неэрмитовских граничных условий, требующих существования лишь уходящих или приходящих от барьера волн /5/. Используя известные выражения для асимптотик вырожденной гипергеометрической функции /6/, в рассматриваемом случае получаем точное выражение для комплексных энергий

$$r_0^2 E_N/\alpha^2 = -\,[\pm\, i\eta - (N + 1/2)]^2, \tag{1}$$

где $\eta = \xi r_0 U_0^{1/2}/2\alpha$, $N = 0, 1, 2...$. В соответствии с (1) получаем, что расстояние между квазиуровнями $\sim \alpha^2/r_0^2$ при ширине $\sim \eta\alpha^2/r_0^2$. Поэтому при $\eta \ll 1$ найденные состояния будут резонансными.

Сравним найденные резонансы с комплексными энергиями, возникающими при наложении граничных условий, определяющих известные резонансы формы /7/:

$$\chi(0) = 0;\ \ \chi(r) \sim \exp(\pm iE^{1/2}(r - r_0)/r_0), \quad r \gg r_0. \tag{2}$$

Используя (2) для определения комплексных энергий, получаем следующее уравнение:

$$M[1/2 \pm iE^{1/2} r_0/\alpha - i\xi r_0 U_0^{1/2}/2\alpha,\ 1 \pm 2ir_0E^{1/2}/\alpha,\ 2i(r_0U_0^{1/2}/\alpha)\exp\alpha] = 0. \tag{3}$$

Найдем приближенные решения этого уравнения при $\xi r_0 U_0^{1/2}/\alpha \equiv \eta \ll 1$. Несмотря на малость параметра η, при произвольном значении параметра $\rho = (r_0 U_0^{1/2}/\alpha)\exp\alpha$ найти приближенные решения уравнения (3) достаточно сложно. Мы рассмотрим случай, когда $\rho \gg 1$. Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$F_L(\eta, \rho) = 0, \tag{4}$$

где $L = -\,1/2 \pm ir_0E^{1/2}/\alpha$, а $F_L(\eta, \rho)$ — регулярная волновая функция для потенциала Кулона /6/. Пользуясь известной асимптотикой кулоновской функции при $\rho \gg 1$ /6/ вместо (4) находим

$$\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L/2 + \sigma_L(\eta) = \pi N, \tag{5}$$

где $N = 0, 1, 2...$, $\sigma_L(\eta) = (1/2i)\ln\,[\Gamma(L + 1 + i\eta)/\Gamma(L + 1 - i\eta)]$ — кулоновский фазовый сдвиг. Легко показать, что при найденных выше значениях комплексных энергий параметр L принимает значения

$$L = L_N = \pm i\eta - N - 1,$$

для которых функция $\sigma_L(\eta)$ обращается в бесконечность. Следовательно, уравнению (4) при $\rho \gg 1$ и $L = L_N$ невозможно удовлетворить ни при каких конечных значениях η. Соответственно значения параметров ρ и η, при которых существуют отмеченные выше два типа резонансов, существенно различны. Это обстоятельство представляет несомненный интерес при создании условий, необходимых для экспериментального изучения резонансов, связанных с неустойчивыми замкнутыми траекториями, проходящими вблизи вершины потенциального барьера.

Граничные условия (2), используемые при нахождении резонансов формы, в данном случае при $\rho \gg 1$, $\eta \ll 1$ и небольших значениях N, вообще не соответствуют резонансным состояниям. Чтобы в этом убедиться рассмотрим решения уравнения (5) для значений $\rho = 10$, $\eta = 0{,}1$ и $N = 0$. При выбранных значениях параметров значения $|L|$ в уравнении (5) должны быть большими и, следовательно, можно воспользоваться асимптотикой функции $\sigma_L(\eta)$. С помощью известного асимптотического разложения отношения двух Г-функций /6/ $\Gamma(z + a)/\Gamma(z + b) = z^{a-b}[1 + o(z^{-1})]$, $|\arg z| < \pi$ находим $\sigma_L(\eta) = \eta \ln L + o(L^{-1})$. Соответственно вместо уравнения (5) имеем

$$\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L/2 + \eta \ln L = 0. \tag{6}$$

Таблица 1

Энергии связанного и квазисвязанных состояний

	Связанное состояние	Квазисвязанные состояния	
		$s = 0$	$s = 1$
L	6,2925815	6,292709+i0,40408259	6,2931077+i0,80813058
$r_0^2 E/\alpha^2$	—46,139164	—45,977613—i5,4896309	—45,493237—i10,979436

Данные расчетов корней трансцендентного уравнения (6) приведены в табл. 1. Там дано значение действительного корня L_b, соответствующего связанному состоянию, и двух комплексных корней L_s, $s = 0, 1$ с наименьшими значениями $\mathrm{Im}L_s$. Там же указаны соответствующие значения комплексных энергий. Отметим, что для выбранных значений параметров ρ, η и N имеется бесконечная серия квазиуровней, начинающаяся вблизи истинного уровня, соответствующего связанному состоянию. Так как характерные ширины квазиуровней оказались больше характерного расстояния между уровнями, то соответствующие состояния не являются резонансными. Подобно волновым функциям виртуальных уровней, волновые функции найденных квазиуровней характеризуются экспоненциальным возрастанием при $r \to \infty$ и, следовательно, не являются квадратично интегрируемыми. Похожие квазиуровни для потенциала "экспоненциальной стенки" $U(r) = U_0 \exp(-\alpha r)$ были получены в работе /8/. Поскольку энергиям квазиуровней соответствуют полюса S-матрицы рассеяния, то проведенные расчеты энергий квазиуровней представляют интерес при построении аппроксимаций S-матрицы для данного или аналогичных потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанский А. К., Островский В. Н. ЖЭТФ, **95**, 1162 (1989).
2. Celenza L., Tobocman W. Phys. Rev., **174**, 1115 (1968).
3. Lejeune A. Z. Phys., **234**, 391 (1970).
4. Hauge E. H., Støvneng J. A. Rev. Mod. Phys., **61**, 917 (1989).
5. Бруев А. С. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 11, 6 (1988).
6. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган, М., Наука, 1979.
7. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., Наука, 1974.
8. Atabek O., Lefebure R., Jacon M. J. Phys., **B15**, 2689 (1982).

Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 27 декабря 1991 г.

После переработки 28 февраля 1992 г.