

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ РЭП В ГЛАДКОМ ЗАКОРОЧЕННОМ РЕЗОНАТОРЕ

Ю. В. Бобылев, В. В. Северьянов

Приведены результаты численных расчетов частот волн, генерируемых в резонаторе релятивистским пучком электронов, инкрементов развития неустойчивости, а также комплексные значения продольных волновых чисел и амплитуд этих волн.

Исследование устойчивости электронного пучка в продольно ограниченных системах без замедляющей структуры, начатое в 1940 году Мюллером и Ростасом /1/ и продолженное в ряде экспериментальных /2/ и теоретических работ /3, 4/, базировалось на решении уравнения движения электрона в поле какой-либо одной из собственных волн пустого резонатора. Интуитивные и трудно контролируемые допущения о структуре действующего на электрон поля могут послужить причиной неверных заключений об устойчивости электронного пучка в подобной системе и ее эффективности как генератора или усилителя электромагнитного излучения. В связи с этим целесообразно использование более строгого метода описания электромагнитных процессов в продольно ограниченных системах, основанного на решении уравнений Максвелла для самосогласованного поля совместно с бесстолкновительным кинетическим уравнением Власова с учетом граничных и начальных условий. При этом действующее на электроны пучка поле определяется из данной системы уравнений, а связанное с увеличением частоты генерации изменение структуры поля и относительной роли волн различной природы учитывается автоматически.

В настоящей работе представлены результаты численного эксперимента по исследованию устойчивости релятивистского пучка электронов в гладком проводящем резонаторе с закороченными торцами, в основу которого положен указанный метод описания электромагнитных процессов.

Математическая формулировка задачи. Однородный по сечению холодный пучок релятивистских электронов с плотностью n_b и скоростью u распространяется в гладком цилиндрическом резонаторе радиуса R и длины L , боковая поверхность и торцы которого считаются идеально проводящими. Пучок стабилизирован бесконечно сильным продольным магнитным полем, а его пространственный заряд скомпенсирован неподвижными ионами. Торцы резонатора не препятствуют входу и выходу пучка.

Азимутально симметричное самосогласованное электромагнитное поле возбуждает в линейном приближении модуляции плотности и тока пучка в соответствии с формулами:

$$\delta n_b = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{4\pi e u^2} \int_0^z (z - \xi) E_z(t - (z - \xi)/u, \xi) d\xi, \quad (1)$$

$$\delta j_{zb} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{4\pi u^2} \int_0^z (z - \xi) E_z(t - (z - \xi)/u, \xi) d\xi,$$

где $\omega_b = (4\pi e^2 n_b / m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота электронов, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, а E_z — продольная составляющая напряженности электрического поля.

Изучение динамики поля и пучка начинаем с того момента, когда фронт пучка прошел через резонатор, а невозмущенный ток достиг своего максимального стационарного значения. При этом интегродифференциальное уравнение для продольной составляющей поля становится однородным и входящая в него величина ω_b перестает зависеть от переменной $t - z/u$. Полагая

$$E_z(t, z, \eta) = \sum_{s=1}^{\infty} J_0(k_{\perp s} \eta) e^{-i\omega t} \sum_{\nu=1}^4 A_{\nu} e^{ik_{\nu} z}, \quad (2)$$

где $k_{\perp s} = \mu_s/R$, μ_s — корни функции Бесселя $J_0(\mu_s) = 0$, а k_{ν} — продольные волновые числа, и требуя обращения в нуль тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на проводящих поверхностях, приходим к дисперсионному уравнению:

$$(e^{i(k_2 - k_1)L} - 1) - (e^{i(k_3 - k_1)L} - 1) \frac{(1 - k_1^2/k_2^2)(1 - k_2^2/k_4^2)}{(1 - k_1^2/k_3^2)(1 - k_3^2/k_4^2)} - (e^{i(k_4 - k_1)L} - 1) \times$$

$$\times \frac{(1 - k_1^2/k_2^2)(1 - k_2^2/k_3^2)}{(1 - k_1^2/k_4^2)(1 - k_4^2/k_3^2)} = 0. \quad (3)$$

Входящие в (3) продольные волновые числа k_{ν} четырех волн одной и той же частоты ω определяются из характеристического уравнения для s -ой моды волновода

$$k_{\perp s}^2 + (k_{\nu}^2 - \omega^2/c^2) [1 - \omega_b^2 \gamma^{-3} / (\omega - k_{\nu} u)^2] = 0 \quad (4)$$

по точным формулам, полученным в работе /5/.

Дисперсионное уравнение (3), определяющее спектр собственных частот резонатора, решалось на ЭВМ ЕС-1054 с двойной точностью при следующих значениях параметров: $\alpha_s^2 = \omega_b^2 \gamma^{-3} / k_{\perp s}^2 u^2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ (что соответствует току пучка значительно меньшему тока Пирса), $\gamma = 10$. На печать выводились значения реальной и мнимой частей функции, входящей в уравнение (3), а также корень из суммы их квадратов. Для каждой собственной частоты и соответствующего ей набора k_{ν} контролировалось выполнение уравнения (4), причем точность этого равенства никогда не была хуже 10^{-8} . Комплексные амплитуды волн A_{ν} , определяющие продольную структуру волнового поля, и поперечные составляющие поля E_r , B_{φ} вычислялись по строгим формулам линейной теории. Помимо того, рассчитывалось изменение энергии электрона на выходе из резонатора, обусловленное его взаимодействием с каждой из волн.

Спектр собственных частот резонатора. В приведенных в табл. 1 результатах расчета использована следующая нумерация волн: индексы 1 и 2 относятся к медленной и быстрой пучковым волнам, индексы 3 и 4 — к попутной и встречной электромагнитным волнам. Даны значения безразмерных величин $\omega/k_{\perp s} u = \omega_s$ и $k_{\nu}/k_{\perp s} = k_{\nu s}$, а также углы пролета электрона $\varphi_4 = (\omega - k_4 u)L/u$ и $\text{Re } k_4 L$.

Малые значения инкрементов в четырех первых колонках табл. 1 свидетельствуют о том, что длины резонатора близки к значениям, характерным для стационарных волн ($\text{Im } \omega = 0$). Расчеты показывают, что при плавном увеличении длины резонатора инкремент непрерывно возрастает, проходит через максимум и убывает до нуля при некотором новом значении $k_{\perp s} L$. Прохождение инкремента через максимум демонстрирует рис. 1. На нем показано также изменение частоты генерации. Начальный участок графика хорошо соответствует формуле $\Delta\omega \approx -\Delta L \times (\partial\Lambda/\partial L)/(\partial\Lambda/\partial\omega)$, где $\Lambda(\omega, L)$ — левая часть дисперсионного уравнения (3). Результаты, представленные в шестой колонке табл. 1, получены при плавном изменении $k_{\perp s} L$ от значения 8,03, фигурирующего в первой колонке, до 9,705691. Таким же образом из второй колонки получены результаты, приведенные в седьмой колонке.

Продольная структура поля в резонаторе. Входящие в формулу (2) комплексные амплитуды A_{ν} содержат информацию о продольной структуре поля, с которым взаимодействует электронный пучок. Относительные значения этих коэффициентов A_{ν}/A_4 для собственных частот резонатора, представленных в колонках 5 и 6 табл. 1, следующие: $A_1/A_4 = 7,8 \cdot 10^{-2} \exp(i \cdot 0,13)$; $A_2/A_4 = -6,8 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 0,135)$; $A_3/A_4 = 0,79 \exp(i \cdot 0,265)$; $A_1/A_4 = 8,7 \cdot 10^{-2} \exp(i \cdot 2,83 \cdot 10^{-2})$; $A_2/A_4 = -7,8 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 3,64 \cdot 10^{-2})$; $A_3/A_4 = 0,84 \exp(i \cdot 1,56 \cdot 10^{-2})$.

При $\alpha_s^2 = 2,6 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 10$ и $k_{\perp s} L = 11,353533$ собственная частота резонатора $\omega_s = 1,1618648 + i \cdot 1,6182782 \cdot 10^{-2}$. Ей соответствуют: $A_1/A_4 = 0,104 \exp(i \cdot 2,03 \cdot 10^{-2})$; $A_2/A_4 = -9,3 \cdot 10^{-4} \exp(i \cdot 2,94 \cdot 10^{-2})$; $A_3/A_4 = 0,86 \exp(i \cdot 1,37 \cdot 10^{-3})$.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов собственных частот резонатора

	Волны с малыми инкрементами					Волны с максимальными инкрементами	
	1	2	3	4	5	6	7
ω_s	$1,1199794 +$ $i \cdot 8,8386222 \cdot 10^{-5}$	$1,2459725 +$ $i \cdot 2,2246508 \cdot 10^{-4}$	$2,4412391 +$ $i \cdot 6,2554808 \cdot 10^{-4}$	$4,3643321 +$ $i \cdot 1,9239794 \cdot 10^{-4}$	$1,0156765 +$ $i \cdot 8,1017689 \cdot 10^{-3}$	$1,0693074 +$ $i \cdot 1,5167069 \cdot 10^{-2}$	$1,1621138 +$ $i \cdot 1,5779623 \cdot 10^{-2}$
k_{1s}	$1,1753086 +$ $i \cdot 9,1848031 \cdot 10^{-5}$	$1,3060781 +$ $i \cdot 2,3062246 \cdot 10^{-4}$	$2,5336932 +$ $i \cdot 6,3772124 \cdot 10^{-4}$	$4,4817398 +$ $i \cdot 1,9404149 \cdot 10^{-4}$	$1,0668106 +$ $i \cdot 8,4363268 \cdot 10^{-3}$	$1,1228364 +$ $i \cdot 1,5776652 \cdot 10^{-2}$	$1,2190780 +$ $i \cdot 1,6384308 \cdot 10^{-2}$
k_{2s}	$1,1148399 +$ $i \cdot 8,7980691 \cdot 10^{-5}$	$1,2402549 +$ $i \cdot 2,2144443 \cdot 10^{-4}$	$2,4300399 +$ $i \cdot 6,2268064 \cdot 10^{-4}$	$4,3443282 +$ $i \cdot 1,9151834 \cdot 10^{-4}$	$1,0110156 +$ $i \cdot 8,0645950 \cdot 10^{-3}$	$1,0645995 +$ $i \cdot 1,5097478 \cdot 10^{-2}$	$1,1567810 +$ $i \cdot 1,5707225 \cdot 10^{-2}$
k_{3s}	$0,43144126 +$ $i \cdot 2,0423028 \cdot 10^{-4}$	$0,67394427 +$ $i \cdot 3,7235262 \cdot 10^{-4}$	$2,1320903 +$ $i \cdot 6,7389840 \cdot 10^{-4}$	$4,1283011 +$ $i \cdot 1,9596228 \cdot 10^{-4}$	$5,7408263 \cdot 10^{-2} +$ $i \cdot 0,96511090 \cdot 10^{-1}$	$0,30078357 +$ $i \cdot 4,7054410 \cdot 10^{-2}$	$0,52233594 +$ $i \cdot 3,15001353 \cdot 10^{-2}$
k_{4s}	$-0,4816310 -$ $i \cdot 2,0728656 \cdot 10^{-4}$	$-0,7283323 -$ $i \cdot 3,7948936 \cdot 10^{-4}$	$-2,2133451 -$ $i \cdot 6,8320412 \cdot 10^{-4}$	$-4,2257049 -$ $i \cdot 1,9672623 \cdot 10^{-4}$	$-0,10388142 -$ $i \cdot 0,96808475 \cdot 10^{-1}$	$-0,34920460 -$ $i \cdot 4,7594403 \cdot 10^{-2}$	$-0,57396727 -$ $i \cdot 3,20333640 \cdot 10^{-2}$
φ_4	$4,0937615\pi$	$6,0670295\pi$	$2,1016498\pi$	$4,0650197\pi$	$2,5123699\pi$	$4,3829935\pi$	$6,3442048\pi$
k_{1L}	$8,03$	$9,6541$	$1,4185$	$1,48668$	$7,049964$	$9,705691$	$11,480402$
$\text{Rek } L_4$	$-1,2310625\pi$	$-2,2381618\pi$	$-(1-6,248 \cdot 10^{-4})\pi$	$-(1-1,4565 \cdot 10^{-4})2\pi$	$-0,23311751\pi$	$-1,0788387\pi$	$-2,0974632\pi$

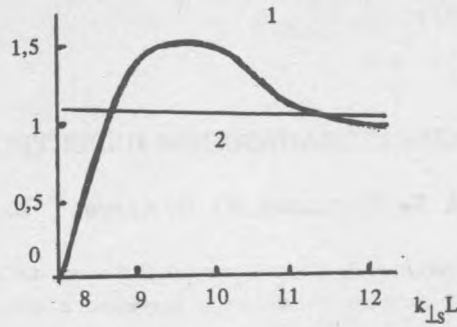


Рис. 1. Зависимость инкремента развития неустойчивости $\text{Im}\omega/k_{\perp s}u$ (увеличено в 100 раз) (1) и частоты генерации $\text{Re}\omega/k_{\perp s}u$ (2) от длины резонатора.

Сравнение приведенных данных позволяет заключить, что по мере увеличения частоты генерации заметно возрастает амплитуда медленной пучковой волны. Поэтому пренебрежение ею при умеренных, а тем более при высоких частотах не может быть оправдано. Наибольшую амплитуду имеет встречная электромагнитная волна и, в отличие от амплитуд остальных трех волн, она нарастает в направлении движения пучка. При частоте, представленной в пятой колонке табл. 1, амплитуда встречной волны на выходе из резонатора вдвое больше, чем на входе. На долю этой волны приходится около 70% энергообмена с пучком.

Расчеты показывают, что амплитудные значения радиальной составляющей поля E_r у пучковых волн в несколько раз больше, чем у электромагнитных. Пучковые волны вызывают в 275 раз большие модуляции плотности пучка и в 40 раз — модуляции плотности его тока, чем электромагнитные. Вклад всех четырех волн в модуляцию азимутального магнитного поля примерно одинаков.

Авторы благодарны А. А. Рухадзе за интерес к работе и плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Müller J. J., Rostas E. Helvet. Phys. Acta, 13, 435 (1940).
 2. Biquard F., Grivet P., Septier A. IEEE Trans., IM-17, 354 (1968); Зарубежная радиоэлектроника, № 10, 123 (1969).
 3. Юлпатов В. К. Изв. ВУЗов. Радиофизика, XIII, 1784 (1970).
 4. Сморгонский А. В. Изв. ВУЗов. Радиофизика, XVI, 150 (1973).
 5. Северьянов В. В. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 11, 12, 14 (1991).
- Институт общей физики РАН

Поступила в редакцию 20 января 1992 г.