Краткие сообщения по физике № 3, 4 — 1992 г.

УДК 539.186.2

ОСЦИЛЛЯЦИИ СЕЧЕНИЯ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ НА АТОМЕ ВОДОРОДА В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.И. Крылов

В борновском приближении определены сечения упругих столкновений электронов с атомом водорода в однородном электрическом поле при переходе их в состояния, в которых существенны интерференционные эффекты. Показано, что дифференциальное сечение рассеяния может иметь осцилляционную зависимость от энергии электрона, а интегральное сечение может быть значительно больше известного ранее значения.

Дифференциальное сечение фотоионизации атома в однородном переменном поле как функция частоты имеет осциллирующий характер /1, 2/. Подобным образом ведет себя сечение ионизации быстрыми электронами атома водорода в однородном электрическом поле /3/. Это связано с интерференционными эффектами, которые появляются при переходе атомного (вторичного) электрона в состояния непрерывного спектра энергии, описывающиеся во внешнем электрическом поле волновыми функциями в виде суперпозиции бегущих волн.

В такие состояния могут переходить не только атомные электроны, но и падающие на атом первичные электроны, а в дифференциальном сечении таких переходов также появляются осциллирующие слагаемые, которых не может быть в случаях, исследованных в /1—3/. Это отличие особенно заметно проявляется при рассмотрении указанных переходов при упругих столкновениях электронов с атомом водорода в однородном электрическом поле. Определению сечений указанных процессов в нерелятивистском борновском приближении и посвящена настоящая работа.

Направление напряженности $\boldsymbol{\epsilon}$ внешнего электрического поля выберем против оси z декартовой системы координат x, y, z: $\boldsymbol{\epsilon} = (0,0,-\epsilon)$. Поле считаем однородным в области пространства с $z > -L_z$, где L_z — макроскопическая величина. Пусть в таком поле находится водородоподобный атом (m_e — масса, $-e$ — заряд, $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор атомного электрона; Ze — заряд, m_n — масса, $\mathbf{r}_n$ — радиус-вектор ядра) и на него из области пространства с $z \leqslant -L_z$ падает монохроматический поток электронов ($\mathbf{r}_e$ — радиус-вектор одного из таких электронов).

Для определения сечения упругих столкновений электронов с таким атомом выберем координаты $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i$ ($\mathbf{r}_i = [m_e \mathbf{r}_a + m_n \mathbf{r}_n] m_i^{-1}$, $m_i = m_e + m_n$); $\mathbf{R} = (m_i \mathbf{r}_i + m_e \mathbf{r}_e) M^{-1}$ ($M = m_e + m_i$); $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_n$.

Причем $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{R} = (x_R, y_R, z_R)$.

Если в качестве возмущения выбрать потенциальную энергию взаимодействия атома с падающим на него электроном: $V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = e^2|\boldsymbol{\rho} - (m_n/m_i)\mathbf{r}|^{-1} - Ze^2|\boldsymbol{\rho} + (m_e/m_i)\mathbf{r}|^{-1}$, то в невозмущенном уравнении Шредингера можно провести разделение переменных для всех $\mathbf{r}$, ξ, η, x_R, y_R, и в области плоскости ζ, z_R, лежащей выше лучей $z_R = -(m_i/M)\zeta - L_z$, при $\zeta \leqslant 0$, и $z_R = (m_e/M)\zeta - L_z$, при $\zeta \geqslant 0$; т.е. волновую функцию $\psi(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$ системы электрон + атом представить как произведение: $\psi(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) = \psi_R(\mathbf{R})\psi_\rho(\boldsymbol{\rho})\psi_r(\mathbf{r})$.

В дальнейшем полагаем, что относительная скорость атома и падающего на него электрона значительно больше средней скорости атома в лабораторной системе отсчета. Это позволяет (а также $V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$) не рассматривать характер внешнего движения системы атом + электрон, описывающейся $\psi_R(\mathbf{R})$, и считать ее центр инерции покоящимся в начале координат, где потенциал внешнего поля равен нулю. Тогда $\zeta \in (-L, m_i L/m_e)$ $(L = ML_z/m_i)$, что позволяет использовать оба линейно-независимых решения уравнения Шредингера (функции Эйри /4/) для нахождения $\psi_\rho(\boldsymbol{\rho})$, описывающей внутреннее движение системы электрон + атом с продольной (вдоль ϵ) энергией E_ζ.

Если

$$E_\zeta > e_\rho \epsilon L \; (e_\rho = e[1 + (Z - 2)m_e/M]) \tag{1}$$

и, кроме того,

$$(k_{0\zeta}\ell)^2 >> 1 \tag{2}$$

(определение $k_{0\zeta}$ и ℓ см. ниже), то используя асимптотические представления функции Эйри нетрудно найти $\psi_\rho(\boldsymbol{\rho}) \equiv \psi_{\mathbf{k}_0}(\boldsymbol{\rho})$, обеспечивающую стационарную (с отличной от нуля продольной компонентой) плотность потока электронов относительно атома:

$$\psi_{\mathbf{k}_0} = (A_{\mathbf{k}_0}/s_0^{1/4})\exp\{i[2k_{0\zeta}s_0^{3/2}/3|k_{0\zeta}| + \mathbf{k}_{0\perp}\boldsymbol{\rho}]\}, \tag{3}$$

где $s_0 = \zeta/\ell + E_{\zeta_0}/e_\rho\epsilon\ell$; $\ell = (\hbar^2/2me_\rho\epsilon)^{1/3}$; $E_{\zeta_0} = \hbar^2k_{0\zeta}^2/2m + e_\rho\epsilon L$; $\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_{0\perp}, k_{0\zeta})$ — волновой вектор, определяющий величину и направление микроскопической плотности потока; энергия относительного движения частиц $E_{\mathbf{k}_0} = E_{\zeta_0} + \hbar^2k_{0\perp}^2/2m$; $m = m_e m_i/M$; $A_{\mathbf{k}_0} = (m|k_{0\zeta}|\ell/\hbar k_0)^{1/2}$, при нормировании $\psi_{\mathbf{k}_0}$ начального состояния на единичную плотность потока.

Если энергия E_ζ конечного состояния подчиняется неравенствам

$$e_\rho\epsilon\ell << E_\zeta << e_\rho\epsilon L, \tag{4}$$

то волновая функция $\psi_\rho \equiv \psi_{\mathbf{k}_\perp, E_\zeta}(\boldsymbol{\rho})$, описывающая такое состояние, в соответствии с асимптотиками функций Эйри /4/, имеет вид

$$\psi_{k_\perp, E_\zeta} = (A/s^{1/4})\sin[2s^{3/2}/3 + \pi/4]\exp(i\mathbf{k}_\perp\rho), \tag{5}$$

а величина A, определяемая из условия нормирования $\psi_{k_\perp, E_\zeta}(\rho)$ на единицу, связана с числом $dn_{k_\perp, E_\zeta}$ квантовых состояний, приходящихся на интервал энергии dE_ζ и площадь $d^2k_\perp$ (в плоскости $\mathbf{k}_\perp$), соотношением

$$dn_{k_\perp, E_\zeta} = (4\pi^3 e_\rho \epsilon \ell^2 A^2)^{-1} d^2k_\perp dE_\zeta \tag{6}$$

Используя стандартную методику определения сечений какого-либо процесса в борновском приближении /5/ и учитывая (3)—(6), найдем сечение $d\sigma_{E_\zeta,\varphi}$ перехода электрона, падающего на атом, в состояния, соответствующие интервалам энергии dE_ζ и угла $d\varphi$ (φ — угол между $\mathbf{k}_\perp$ и осью x), и атомного электрона из состояния, описывающегося волновой функцией $\psi_{r0}(\mathbf{r})$, в состояние с волновой функцией $\psi_r(\mathbf{r})$:

$$d\sigma_{E_\zeta,\varphi} = 2\frac{a^2|k_{0\zeta}|}{k_0 Z^2 (E_\zeta E_{0\zeta})^{1/2}}\left|\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_r^*(\mathbf{r})\left\{\frac{1}{q_+^2}\exp[-i(\beta+\mathbf{q}_+\mathbf{r})] -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{q_-^2}\exp[i(\beta-\mathbf{q}_-\mathbf{r})] - 2Z\frac{2\kappa_\zeta\kappa_{0\zeta}\cos\beta - iB\sin\beta}{B^2-(2\kappa_\zeta\kappa_{0\zeta})^2}\right\}\psi_{r0}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}\right|^2 dE_\zeta d\varphi, \tag{7}$$

где $a = \hbar^2/Ze^2m$; $\beta = (2/3)(E_\zeta/e_\rho\epsilon\ell)^{3/2} + \pi/4$; $B = q_\perp^2 + \kappa_\zeta^2 + \kappa_{0\zeta}^2$; $\boldsymbol{\kappa}_0 = (\mathbf{k}_{0\perp}, k_{0\zeta}(2mE_{\zeta_0})^{1/2}/\hbar|k_{0\zeta}|)$; $\mathbf{q}_\pm = \boldsymbol{\kappa}_\pm - \boldsymbol{\kappa}_0$; $\boldsymbol{\kappa}_\pm = (\mathbf{k}_{\perp 0}, \pm\kappa_\zeta)$; $\kappa_\zeta = (2mE_\zeta)^{1/2}/\hbar$; $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_{0\perp}$; $k_\perp^2 = k_0^2 + L/\ell^3 - (2m/\hbar^2)(E_\zeta + E_r - E_{r0})$; E_{r0}, E_r — начальная и конечная энергии атомного электрона.

Для упругих столкновений в формуле (7) положим $\psi_r(\mathbf{r}) \equiv \psi_{r0}(\mathbf{r})$ и $E_r = E_{r0}$. Для $\epsilon \ll e/a^2$ можно пренебречь влиянием однородного электрического поля на состояние атома водорода и выбрать

$$\psi_{r0}(\mathbf{r}) = (\pi a^3)^{-1/2}\exp(-r/a). \tag{8}$$

Подставляя эту функцию в (7) и проведя интегрирование, получим:

$$d\sigma_{E_\zeta,\varphi} = 2\frac{a^2|k_{0\zeta}|}{k_0 Z^2 (E_\zeta E_{0\zeta})^{1/2}}\left|\frac{\exp(-i\beta)}{q_+^2[1+(aq_+/2)^2]^2} - \frac{\exp(i\beta)}{q_-^2[1+(aq_-/2)^2]^2} -\right.$$

$$\left. - 2Z\frac{2\kappa_\zeta\kappa_{0\zeta}\cos\beta - iB\sin\beta}{B^2-(2\kappa_\zeta\kappa_{0\zeta})^2}\right|^2 dE_\zeta d\varphi. \tag{9}$$

Это выражение существенно упрощается для $Z = 1$ и $(aq_\pm)^2 \ll 1$ (что не противоречит (2)):

$$d\sigma_{E_\zeta,\varphi} = \frac{a^2|k_{0\zeta}|}{k_0(E_\zeta E_{\zeta_0})^{1/2}}\left[1 - \sin\frac{4}{3}\left(\frac{E_\zeta}{e_\rho\epsilon\ell}\right)^{3/2}\right]dE_\zeta d\varphi. \tag{10}$$

Правая часть этого выражения не зависит от угла, что позволяет проинтегрировать его по φ:

$$d\sigma_{E_\zeta} = 2\pi d\sigma_{E_\zeta,\varphi}/d\varphi. \tag{11}$$

Из полученных выражений видно, что влияние однородного поля на электрон, падающий на атом, в начальном состоянии приводит к проявлению анизотропии в сечении, выраженной множителем $|k_{0\zeta}|/E_{0\zeta}^{1/2}$, а в конечном состоянии это влияние наиболее ярко проявляется в наличии осцилляционного слагаемого, связанного с интерференцией рассеивающихся электронов в однородном электрическом поле.

Используя (11), можно оценить вклад в полное сечение (при упругих соударениях) области $(0, e_\rho\epsilon L)$ энергии E_ζ. Для этого, делая подстановку в (11) $t = 4^{1/3}(E_\zeta/e_\rho\epsilon\ell)^{1/2}$, получим

$$d\sigma_t = 2^{4/3}\pi a^2\frac{|k_{0\zeta}|}{k_0}(e_\rho\epsilon\ell/E_{\zeta_0})^{1/2}\left[1 - \sin\frac{t^3}{3}\right]dt. \tag{12}$$

При интегрировании по t функции $\sin(t^3/3)$ в качестве нижнего и верхнего пределов интегрирования (учитывая (4)) можно выбрать ноль и бесконечность, и соответствующий интеграл даст малую величину приблизительно равную $0{,}2\pi$ /6/. Окончательное интегрирование (12) по указанному интервалу энергии дает

$$\Delta\sigma \approx 4\pi a^2(|k_{0\zeta}|/k_0)(e_\rho\epsilon L/E_{\zeta_0})^{1/2}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что если $k_{0\zeta}^2 \gg L/\ell^3$, то в $\Delta\sigma$ не будет проявляться анизотропия пространства, связанная с однородным электрическим полем, но величина эта зависит от ϵ:

$$\Delta\sigma \approx 4\pi a^2 (2me_\rho \epsilon L)^{1/2}/\hbar k_0. \tag{14}$$

Если же выполняются условия $1 \ll (\ell k_{0\zeta})^2 \ll L/\ell$, то $\Delta\sigma$ практически не зависит от ϵ, но в нем проявляется анизотропия пространства:

$$\Delta\sigma \approx 4\pi a^2 |k_{0\zeta}|/k_0. \tag{15}$$

Отметим, что величины, определяемые (13)—(15), значительно больше сечения $\Delta\sigma_0$ перехода падающего электрона в состояния с $E_\zeta > e_\rho \epsilon L$, которые описываются волновыми функциями вида (3). Как показано в /7/, при $(qa)^2 \ll 1$

$$\Delta\sigma_0 \sim (\ell^3 |k_\zeta k_{0\zeta}|/L)\Delta\sigma,$$

где коэффициент $\ell^3 |k_\zeta k_{0\zeta}|/L$ при выбранных условиях значительно меньше единицы.

Следовательно, при упругих столкновениях электронов с атомом водорода в однородном электрическом поле в пределе $(q_\pm a)^2 \ll 1$ дифференциальное сечение может быть осциллирующей функцией продольной энергии падающего на атом электрона, а сечение, соответствующее области энергии $E_\zeta < e\epsilon L$, значительно больше чем для случая $E_\zeta > e\epsilon L$. Этот факт необходимо учитывать при рассмотрении столкновений в физике газового разряда, физике плазмы и т.п.

Автор благодарен А.А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратович В.Д., Островский В.Н. ЖЭТФ, **79**, 395 (1980).
2. Фабрикант И.И. ЖЭТФ, **83**, 1675 (1982).
3. Крылов В.И. Письма в ЖТФ, **16**, 60 (1990).
4. Яковлева Г.Д. Таблицы функций Эйри и их производных, М., Наука, 1969.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М., Наука, 1974.
6. Справочник по специальным функциям, под. ред. М. Абрамовиц; И. Стиган, М., Наука, 1979, с. 266.
7. Крылов В.И. Краткие сообщения по физике ФИАН, №11,12,64 (1991).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 7 февраля 1992 г.