Краткие сообщения по физике № 5, 6 — 1992 г.

УДК 535.214

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СКОРОСТЯМ АТОМОВ, ОХЛАЖДАЕМЫХ ПОЛЕМ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВСТРЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН

В.А. Алексеев, Д.Д. Крылова

Найдено аналитическое выражение для функции распределения, описывающее охлаждение атомов полем монохроматических встречных волн с неравными интенсивностями.

После теоретического обоснования метода охлаждения атомов резонансным световым полем /1/ (доплеровское охлаждение) этому вопросу было посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ /2, 3/. В /4/ был установлен вид стационарной функции распределения атомов по скоростям /2—5/, которая имеет вид максвелловского распределения с температурой T равной

$$k_B T = \alpha\hbar\Gamma(|\Delta\omega|/\Gamma + \Gamma/|\Delta\omega|), \tag{1}$$

где k_B — константа Больцмана, 2Γ — радиационная ширина верхнего уровня, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ — отстройка частоты светового поля ω от частоты перехода ω_0, коэффициент α порядка единицы зависит от поляризации охлаждающего излучения.

Поскольку в реальной ситуации стационарное распределение (1) при конечных временах взаимодействия не достигается, для сравнения экспериментально достигнутого охлаждения с предсказанием теории используется численное решение уравнения в частных производных, описывающее нестационарную функцию распределения. В настоящей работе для такой функции распределения получено простое аналитическое выражение.

При решении задачи удобно использовать уравнение для матрицы плотности $\rho_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ (i, j = 1, 2) /6, 7/, квантовым образом характеризующей как движение электронов (переход 1 → 2), так и движение центра инерции атома, описываемое волновыми векторами **p**, **p**$'$ ($\hbar\mathbf{p}$ — импульс поступательного движения атома).

В поле двух встречных волн $E = (1/2)E_1\exp(ikR - i\omega t) + (1/2)E_2\exp(-ikR - i\omega t)$ + к.с. уравнения для диагональных по внутреннему состоянию атома и медленно зависящей от времени части $\sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')$ недиагонального матричного элемента $\rho_{12}(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \sigma(\mathbf{p},\mathbf{p}')e^{-i\omega t}$ имеют вид /7, 8/:

$$\dot{\sigma}(p,p-k) = -[i(\Delta\omega + \hbar kp/m - \delta) + \Gamma]\,\sigma(p,p-k) +$$
$$+ iQ_1[\rho_{22}(p-k,p-k) - \rho_{11}(p,p)] + iQ_2[\rho_{22}(p+k,p-k) - \rho_{11}(p,p-2k)], \tag{2а}$$

$$\dot{\rho}_{11}(p,p) = iQ_1[\sigma^*(p,p-k) - \sigma(p,p-k)] +$$
$$+ iQ_2[\sigma^*(p,p+k) - \sigma(p,p+k)] + A(p), \tag{2б}$$

$$\dot{\rho}_{22}(p,p) = -2\Gamma\rho_{22}(p,p) + iQ_1[\sigma(p+k,p) - \sigma^*(p+k,p)] +$$
$$+ iQ_2[\sigma(p-k,p) - \sigma^*(p-k,p)]. \tag{2в}$$

Здесь $Q_{1,2} = dE_{1,2}/\hbar$; d — матричный элемент дипольного момента перехода $1 \to 2$; $\delta = \hbar k^2/2m$ — сдвиг отдачи; член A(p) описывает влияние спонтанного излучения /9/

$$A(p) = (2\Gamma/4\pi)\int\rho_{22}(p+s,\ p+s)F(s)do_s,$$

где $|s| = \omega/c = k$. Функция F(s) зависит от поляризации охлаждающего излучения. Считаем F(s) = 1, т.е. полагаем спонтанное излучение изотропным, что в (1) соответствует $\alpha = 1/3$. В случае линейной поляризации поля вдоль оси z ось z удобно выбрать в качестве оси квантования. При этом $F(s) = 1 - (sk)^2/k^4$ и $\alpha = 7/20$.

Наличие в правой части (2а) матричных элементов $\rho_{11}(p,p-2k)$, $\rho_{22}(p+k,p-k)$ делает систему (2) незамкнутой. Уравнения для величин $\rho_{11}(p,p\pm 2k)$ вовлекают в рассмотрение матричные элементы $\rho_{ii}(p,p\pm 2nk)$ и $\sigma(p,p\pm(2n+1)k)$, где n — целое число /7/, которые учитывают эффекты пространственного выгорания, хорошо известные в задачах нелинейной спектроскопии /10/. Их точный учет превращает (2) в бесконечную цепочку уравнений, которая даже без учета спонтанного излучения A(p) может быть разрешена только численными методами /10/. Вместе с тем, известно, что пренебрежение эффектами пространственного выгорания в задачах спектрального выгорания линии не приводит к серьезным ошибкам. Именно в таком приближении получается стационарная функция распределения, соответствующая температуре (1). Поэтому, решая нестационарную задачу, мы также пренебрежем в (2а) величинами $\rho_{11}(p,p-2k)$, $\rho_{22}(p+k,p-k)$.

Полагая далее поле достаточно слабым $Q_i^2/\Gamma^2 \ll 1$, можно исключить из уравнений (2) быстро затухающие величины σ и ρ_{22} (считая их производные по времени равными нулю), после чего получаем:

$$\partial\rho(\mathbf{p})/\partial t = -\ [Q_1^2 S(\mathbf{p},\mathbf{k}) + Q_2^2 S(\mathbf{p},-\mathbf{k})]\rho(\mathbf{p}) +$$

$$+ (1/4\pi)\int dO_s = [Q_1^2 S(\mathbf{p}+\mathbf{k}+\mathbf{s},\mathbf{k})\rho(\mathbf{p}+\mathbf{k}+\mathbf{s}) + Q_2^2 S(\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{s},-\mathbf{k})\rho(\mathbf{p}-\mathbf{k}+\mathbf{s})], \tag{3}$$

где $\rho(\mathbf{p}) = \rho_{11}(\mathbf{p},\mathbf{p})$ — функция распределения атомов по волновым векторам (скоростям $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{p}/m$), $S(\mathbf{p},\mathbf{k}) = 2\Gamma[(\Delta\omega + \hbar\mathbf{k}\mathbf{p}/m - \delta)^2 + \Gamma^2]^{-1}$. При $t = 0$ функция распределения является равновесной $\rho(\mathbf{p},t{=}0) = W(\mathbf{p})$. Функция $S(\mathbf{p},\mathbf{k})$ зависит только от проекции $\mathbf{p}$ на направление $\mathbf{k}$, поэтому в том случае, когда распределение $W(\mathbf{p}_\perp)$, где $\mathbf{p}_\perp\mathbf{k} = 0$, является плавной функцией аргумента $\mathbf{p}_\perp$, решение (3) можно искать в виде $\rho(\mathbf{p}) = g(p)W(\mathbf{p}_\perp)$, где p — проекция $\mathbf{p}$ вдоль $\mathbf{k}$. После этого удобно выполнить преобразование Фурье по p-компоненте волнового вектора

$$\overline{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} g(p)\,dp,\quad \overline{W}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} W(p)\,dp.$$

Из (3) получаем:

$$\partial\overline{g}/\partial t = -\ \kappa_1[1 - G(z)]\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-|z-z'| - i\Omega(z-z')]\overline{g}(z')dz' -$$

$$-\ \kappa_2[1 - G^*(z)]\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-|z-z'| + i\Omega(z-z')]\overline{g}(z')dz'; \tag{4}$$

$$\overline{g}(t{=}0) = \overline{W}(z),$$

где $z = k\Gamma x/2\delta$; $\Omega = (\Delta\omega - \delta)/\Gamma$; $\kappa_{1,2} = Q_{1,2}^2/\Gamma$; $G(z) = \exp(-i\epsilon z)\sin(\epsilon z)/(\epsilon z)$; $\epsilon = 2\delta/\Gamma$. Далее полагаем $\epsilon \ll 1$.

В общем случае уравнение (4) не поддается дальнейшему упрощению. Однако в большинстве экспериментов с атомными пучками интенсивности встречных волн почти одинаковы: $\kappa_{1,2} = \kappa \pm \Delta\kappa$, $\Delta\kappa \ll \kappa$ и начальное распределение $W(p)$ является достаточно узким, т.е. функция $\overline{W}(z)$ достаточно широкой по сравнению с экспонентой $\exp(-z)$. В этом случае функцию $\overline{g}(z')$ под интегралом в (4) можно разложить с точностью до членов первого порядка включительно в окрестности точки $z' = z$, а $G(z)$ с точностью до членов второго порядка в окрестности $z = 0$, что соответствует используемому обычно диффузионному приближению /2, 3/. В итоге получим

$$d\overline{g}/dt + az\,d\overline{g}/dz = -\ (ibz + cz^2)\overline{g}(z),$$

где $a = -\ \kappa\epsilon 8\Omega/(1+\Omega^2)^2$, $b = 4\Delta\kappa\epsilon/(1+\Omega^2)$, $c = 8\kappa\epsilon^2/3(1+\Omega^2)$ (в случае линейной поляризации коэффициент c надо домножить на величину 21/20 = 1,05). Решение этого уравнения первого порядка в частных производных находится методом характеристик

$$\bar{g}(z,t) = \bar{W}(ze^{-at})\exp[-(cz^2/2a)(1-e^{-2at}) - i(bz/a)(1-e^{-at})]. \qquad (5)$$

Из (5) видно, что стационарное решение существует при $a > 0$, т.е. при отстройке частоты поля в красную сторону с учетом сдвига отдачи от частоты перехода $\Omega < 0$, и равно

$$\bar{g}_c(z) = \exp(-cz^2/2a - ibz/a).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, находим стационарную функцию распределения

$$g(p) = (1/\sqrt{\pi}p_\infty)\exp[-(p - p_k^\infty)^2/p_\infty^2],$$

где $p_\infty^2 = k^2\Gamma(1+\Omega^2)/3\delta(-\Omega)$, $p_k^\infty = k\Gamma\Delta\kappa(1+\Omega^2)/4\delta\kappa(-\Omega)$, соответствующую температуре (1) ($\alpha = 1/3$) и направленной вдоль **k** скорости $v_k = \hbar k\Delta\kappa\Gamma(1+\Omega^2)/4m\kappa\delta(-\Omega)$; при $\Delta\kappa/\kappa = 10^{-4}$, $\Gamma/\delta = 10^3$, $-\Omega = 1$, $m = 100$ а.е. и $k = 10^5$ см$^{-1}$, получаем $v_k = 50$ см/с.

Выражение (5) показывает, что нестационарная функция распределения приближается к стационарному значению за время порядка $\tau = 1/a \sim \Gamma^2/Q^2\delta$. При $Q^2/\Gamma^2 \approx 0{,}1$ и $\delta \approx 10^5$ с$^{-1}$ это время составляет 10^{-4} с.

Из (5) обратным преобразованием Фурье можно найти в квадратурах нестационарную функцию распределения. Если начальное распределение имеет гауссову форму $W(p) = \exp(-p^2/p_0^2)$, это вычисление можно выполнить аналитически

$$g(p,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\bar{p}(t)}\exp\left[-\left(\frac{p-p_k(t)}{\bar{p}(t)}\right)^2\right]; \; p_k(t) = p_k^\infty(1 - e^{-at}). \qquad (6)$$

Ширина этого распределения

$$\bar{p}(t) = [p_0^2e^{-at} + k^2(\Gamma(1+\Omega^2)/3\delta(-\Omega))(1 - e^{-2at})]^{1/2}$$

изменяется от величины p_0 при $t = 0$ до значения p_∞ при $t \to \infty$, причем при неравных интенсивностях встречных волн $\Delta\kappa \neq 0$, распределение обретает направленную скорость, стремящуюся к значению p_k^∞ при $t \to \infty$.

В тех случаях, когда время взаимодействия определяется временем пролета t атомов через занятую полем область $t = L/v_\perp$, где L — размер этой области, для получения сформировавшейся после такого взаимодействия функции распределения надо подставить в (6) значение $t = L/v_\perp$ и усреднить $g(p, v_\perp, t)$ по поперечным скоростям $v_\perp$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansch T., Schawlow A. Opt. Commun., **13**, 68 (1975).

2. Stenholm S. Rev. Mod. Phys., **58**, 699 (1986).

3. Миногин В.Г., Летохов В.С. Давление лазерного излучения на атомы. М., Наука, 1986.

4. Летохов В.С., Миногин В.Г., Павлик Б.Д. ЖЭТФ, **72**, 1328 (1977).

5. Wineland D., Itano W. Phys. Rev., **A20**, 1520 (1979).

6. Алексеев В.А., Андреева Т.Л., Собельман И.И. ЖЭТФ, **62**, 614 (1972).

7. Алексеев В.А., Андреева Т.Л., Собельман И.И. ЖЭТФ, **64**, 813 (1973).

8. Алексеев В.А., Яценко Л.П. ЖЭТФ, **77**, 2254 (1979).

9. Воробьев Ф.А., Раутиан С.Г., Соколовский Р.И. Оптика и спектроскопия, 27, 728 (1969).

10. Feldman B.J., Feld M.S. Phys. Rev., **1A**, 1375 (1970).

Поступила в редакцию 26 февраля 1992 г.