

## О СТРУКТУРАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА

Г. Л. Алфимов, В. Н. Гончаров

*Представлены новые решения двумерного по пространственным переменным уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера с нелинейностью с насыщением, отвечающие филаментационным структурам лазерного пучка. Одна из найденных структур представляет собой связанное состояние семи решений с круговой симметрией. Изложена методика поиска таких решений.*

Проблема описания возможных структур поля в нелинейной среде является актуальной и малоизученной. На примере среды с керровской нелинейностью было показано [1—2], что даже для плоских структур скалярного поля данный вопрос не является тривиальным и, помимо известных ранее [3] состояний поля с круговой симметрией, возможны другие, более сложные образования, полная классификация которых отсутствует. В частности, остается открытым вопрос о существовании связанных состояний — структур, для которых простейшие состояния с круговой симметрией являлись бы элементарными составляющими. Вопросы о существовании и классификации подобных объектов возникают в различных областях физики, в том числе в нелинейной оптике, гидродинамике, полевой теории элементарных частиц.

В настоящем сообщении приведены результаты исследования возможных стационарных состояний поля в плоской среде с нелинейностью с насыщением (например, в поперечном сечении самофокусированного волновода), а именно, самолокализованных состояний поля, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} - u + g(u) = 0, \quad (1)$$

где

$$g(u) = u^3 / (1 + \gamma u^2); \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2)$$

или

$$g(u) = u^3 - \alpha u^5, \quad \alpha \geq 0 \quad (3)$$

при условиях

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \Phi) = 0; \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Phi) = 0; u(r, \Phi + 2\pi) = u(r, \Phi) \quad (4)$$

и характеризуемых симметрией вида  $u(r, \Phi + 2\pi/N) = u(r, \Phi)$ , где  $N$  — целое число (порядок оси симметрии решения). Уравнение (1) может быть получено как уравнение для стационарных решений двумерного по пространственным переменным нелинейного уравнения типа Шредингера. Нелинейные зависимости типа (2) и (3) широко применяются в нелинейной оптике для описания самофокусирующих сред.

Коротко изложим метод построения решений уравнения (1), имеющих угловую зависимость /1, 2, 4/. Известно /5/, что для широкого класса нелинейных функций  $g(u)$  уравнение (1) допускает набор решений с круговой симметрией  $u_n(r)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\partial u / \partial \Phi \equiv 0$ . В зависимости от вида нелинейности число таких решений может быть конечным или бесконечным. Полагая в (1)

$$u(r, \Phi) = u_n(r) + \psi(r, \varphi), \quad \varphi = \nu \Phi, \quad (5)$$

где  $u_n(r)$  — одно из решений с круговой симметрией, а  $\nu$  — параметр, который будет доопределен ниже, приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\nu^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \psi + g(u_n + \psi) - g(u_n) = 0, \quad (6)$$

для которого рассмотрим задачу

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = 0, \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0; \psi(r, \varphi + 2\pi) = \psi(r, \varphi), \quad (7)$$

являющуюся нелинейной задачей на собственные значения параметра  $\nu^2$ . Условия (7) соответствуют (4) только при целых значениях  $\nu$ . Решения этой задачи определяют дисперсионное соотношение  $D_n(\nu, \|\psi\|) = 0$ , устанавливающее связь между параметром  $\nu$  и нормой решения (6)

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r \psi^2 dr.$$

На плоскости  $(\nu, \|\psi\|)$  это дисперсионное соотношение порождает конечное или бесконечное число кривых, начинающихся в точках ветвления  $(\nu_k, 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При этом  $\nu_k$  определяются линейной задачей на собственные значения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\nu^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \psi + g'(u_n) \psi = 0, \quad (8)$$

которая получается из (6) в предположении, что  $\psi \rightarrow 0$ . Соответствующие собственные значения параметра  $\nu$  не являются целыми числами и основная задача заключается в численном построении на плоскости  $(\nu, \|\psi\|)$  кривых  $D_n(\nu, \|\psi\|) = 0$ , начиная от точек  $(\nu_k, 0)$  до целочисленных значений  $\nu$ . В этих точках восстанавливается последнее из условий (4), т.е. условие  $2\pi$ -периодичности по исходной угловой переменной  $\Phi$ . Таким образом, условия  $\nu(\|\psi\|) = N$  являются правилами отбора решений, удовлетворяющих условиям самолокализации по радиальной переменной  $r$  и обладающих осью симметрии  $N$ -го порядка.

Изложим результаты, полученные для уравнения (1) с нелинейным членом вида (2). Известно /6/, что задача в этом случае допускает при  $0 \leq \gamma < 1$  счетное множество самолокализованных решений  $\{u_n(r)\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , которое может быть упорядочено по числу нулей функции  $u_n(r)$ . При численном решении задачи (6), (7) обнаружено, что при  $n = 0$  точки ветвления отсутствуют, при  $n = 1$  и  $n = 2$  возникают соответственно одна и две точки ветвления. Зависимость соответствующих собственных значений  $\nu$  от параметра насыщения  $\gamma$  приведена на рис. 1а. Каждая точка ветвления при фиксированном значении параметра  $\gamma$  порождает свою дисперсионную кривую  $D(\nu, \|\psi\|, \gamma = \text{const}) = 0$ . На рис. 1б приведена одна из таких кривых  $\nu = \nu(\|\psi\|)$ , ( $n = 2$ , точка ветвления  $\nu \approx 4,86$ ), отвечающая случаю  $\gamma = 0,2$ . Точке пересечения кривой  $\nu = \nu(\|\psi\|)$  с прямой  $\nu = 4$  соответствует самолокализованное по  $r$  состояние поля с осью симметрии 4-го порядка (рис. 2), аналогичное найденному в /1/. С приближением  $\gamma$  к 1 область локализации решений  $u_n(r)$  растет, поэтому при  $\gamma \sim 1$  расчет не проводили. Согласно рис. 1а, следует ожидать, что при некоторых значениях параметра  $\gamma$  могут реализовываться самолокализованные структуры с осями симметрии пятого ( $n = 1$ ) и десятого ( $n = 2$ ) порядков, однако численно найти их не удалось. Это связано с тем, что на соответствующих ветвях  $\nu$  очень слабо зависит от  $\|\psi\|$  и уверенно отыскать точку пересечения кривой  $\nu = \nu(\|\psi\|)$  с целочисленной прямой на плоскости  $(\nu, \|\psi\|)$  не удастся даже для тех значений  $\gamma$ , для которых сама точка ветвления  $\nu_k$  близка к целому числу.

Изложим результаты, полученные для уравнения (1) с нелинейным членом вида (3). Методом, аналогичным методу работы /3/ можно показать, что в этом случае радиальные решения  $u_n(r)$

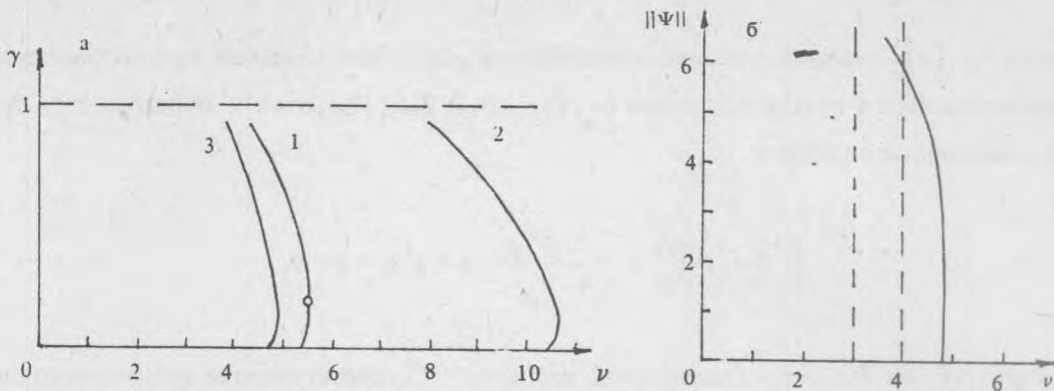


Рис. 1. а) Зависимость значения точки ветвления  $\nu$  от параметра насыщения  $\gamma$ ; кривая 1 отвечает  $n = 1$  (единственная точка ветвления); кривые 2 и 3 соответствуют  $n = 2$  (первая и вторая точки ветвления). б) Дисперсионная кривая, выходящая из точки ветвления  $\nu \approx 4,86$  (отмечена кружком на рис. 1а), при  $n = 2$ ,  $\gamma = 0,2$ .

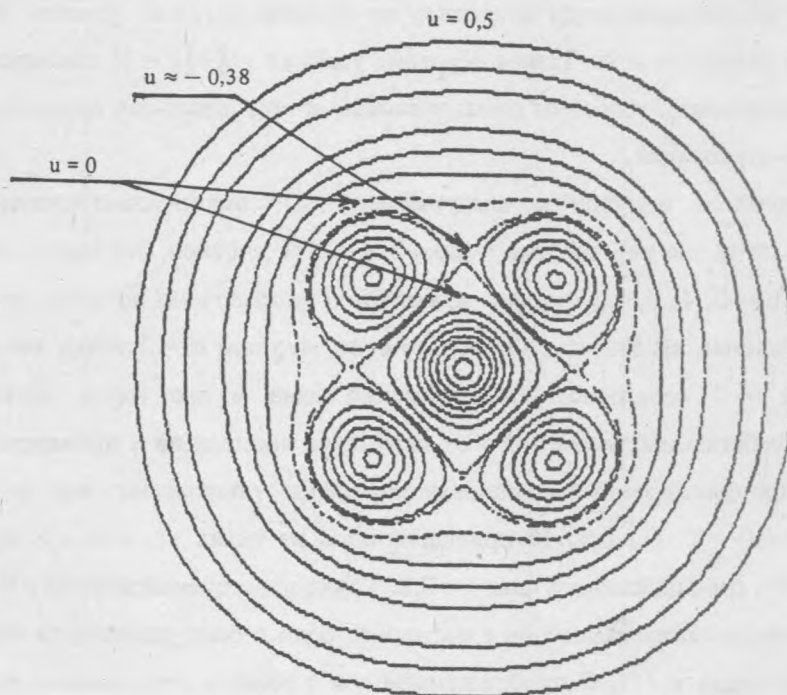


Рис. 2. Линии уровня решения с осью симметрии четвертого порядка. Линии проведены с шагом  $h = 0,5$ , выделена сепаратриса  $u \approx -0,38$ .

могут существовать только при  $\alpha < 3/16$ . Численно выяснено, что число радиальных решений зависит от параметра  $\alpha$  и растет при уменьшении параметра  $\alpha$  от  $3/16$  до нуля. Так, в интервале  $0,17 < \alpha < 3/16$  радиальные решения отсутствуют, при  $0,11 < \alpha < 0,17$  существует только безузловая мода  $u_0(r)$ , при  $\alpha \approx 0,11$  и  $\alpha \approx 0,08$  появляются первая  $u_1(r)$  и вторая  $u_2(r)$  моды, обладающие соответственно одним и двумя нулями. Таким образом, в отличие от случая нелинейности (2), уравнение (1) с нелинейностью (3) не допускает счетного числа радиальных решений  $u_n(r)$ .

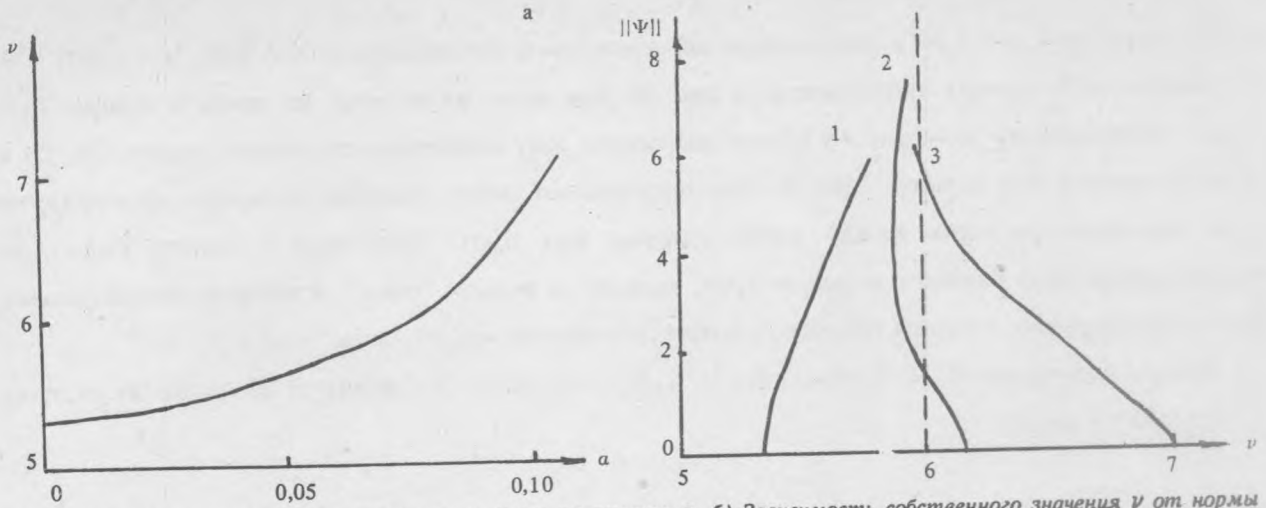


Рис. 3. а) Зависимость собственного значения  $\nu$  от параметра  $\alpha$ . б) Зависимость собственного значения  $\nu$  от нормы решения  $\|\psi\|$  для  $\alpha = 0$  (1), 0,08 (2), 0,107 (3). Нелинейность вида (3), ветвление от  $u_1(r)$ .

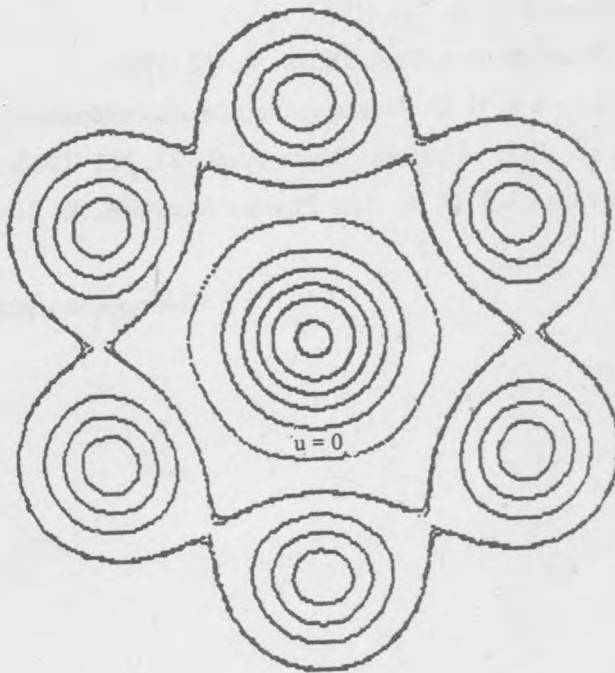


Рис. 4. Линии уровня решения с осью симметрии шестого порядка (нелинейность (3)). Линии проведены с шагом  $h = 0,5$ , сепаратриса отвечает  $u \approx -0,51$ .

Аналогично случаю нелинейности (2) было выяснено, что и для нелинейности (3) задача (6), (7) не допускает ни при каких значениях  $\alpha$  точек ветвления  $\nu$  при  $n = 0$ , а при  $n = 1$  и  $n = 2$  имеет, соответственно, одну и две точки ветвления. На рис. 3а представлена зависимость значения точки ветвления  $\nu_1$  от параметра  $\alpha$  для первой моды  $u_1(r)$ . Следуя описанному выше методу, на плоскости  $(\nu, \|\psi\|)$  при выбранных фиксированных значениях  $\alpha$  были построены кривые, начинающиеся в

точках ветвления  $\nu_1 = \nu_1(\alpha)$ , описываемые дисперсионным соотношением  $D(\nu, \|\psi\|, \alpha = \text{const}) = 0$ . Несколько таких кривых представлено на рис. 3б. Как видно из рисунка, на одной из кривых ( $\alpha \approx 0,107$ ) целочисленное значение  $\nu = 6$  было достигнуто. Ему соответствует решение задачи (1), (3) с осью симметрии 6-го порядка (рис. 4). Оно представляет собой связанное состояние, состоящее из семи взаимодействующих между собой нулевых мод  $u_0(r)$ . При этом в центре структуры распределение поля близко к решению  $u_0(r)$ , взятому со знаком "плюс", в то время как остальные шесть образований с хорошей точностью аппроксимируются  $-u_0(r)$  (знак "минус").

Авторы благодарны В. М. Елеонскому, Н. Е. Кулагину и В. П. Силину за полезные обсуждения и поддержку в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Alfi m o v G. L. et al. Phys. Lett. A, **138**, 443 (1989).
2. Alfi m o v G. L. et al. Physica D, **44**, 168 (1990).
3. Я н с к а у с к а с З. К. Радиофизика, Изв. ВУЗов, **9**, 412 (1966).
4. Ал ф и м о в Г. Л., Ку л а г и н Н. Е. Математическое моделирование, **2**, 78 (1990).
5. B e r e s t y c k i H, L i o n s P. L. Arch. Rat. Mech. Anal., **82**, 313 (1983).
6. K o l o k o l o v A. A., S k r o t s k y G. V. Acta Physica Austriaca, **38**, 216 (1973).

Поступила в редакцию 13 марта 1992 г.