Краткие сообщения по физике № 7, 8 — 1992 г.

УДК 530.145

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ АЛГЕБРЫ sl(2) В МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

В. П. Карасев

Даны две схемы применения формализма введенных недавно полиномиальных деформаций $sl_d(2)$ алгебры $sl(2)$ к решению некоторых задач квантовой оптики.

В работах /1, 2/ было установлено, что ряд существенно нелинейных (неквадратичных) гамильтонианов H квантово-оптических моделей линейно выражается через генераторы V_α

$$H = aV_0 + bV_+ + b^*V_- + C, \quad [V_\alpha, C] = 0, \tag{1}$$

новых Ли-алгебраических объектов $g_d = sl_d^\varphi(2)$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям:

$$[V_0, V_\pm] = \pm V_\pm, \tag{2а}$$

$$[V_-, V_+] = \Delta_x \varphi_n(x)\Big|_{x=V_0} = \varphi_n(V_0 + 1) - \varphi_n(V_0), \tag{2б}$$

где $\varphi_n(x)$ — структурный полином n-ой степени по переменной x. Эти объекты $sl_d^\varphi(2)$ были названы полиномиальными (в отличие от известных q-деформаций /3/) деформациями алгебры Ли sl(2), поскольку при квадратичных структурных полиномах $\varphi_2(x) = \pm x(x - 1)$ они сводятся к некомпактной или компактной версии sl(2) — алгебрам su(1,1) или su(2). В качестве примера приведем не рассмотренный в /1/ гамильтониан:

$$H^{cf} = \omega a^+a + n\omega b^+b + g(a^+)^n b + g^* a^n b^+, \tag{3}$$

описывающий квантовые процессы генерации гармоник и деления частоты /4/ и сводимый к виду (1):

$$H^{cf} = \omega R + gV_+ + g^*V_-, \quad [R, V_\alpha] = 0,$$

с помощью преобразований

$$R = a^+a + nb^+b, \quad V_+ = (a^+)^n b, \quad V_- = a^n b^+, \quad V_0 = (a^+a - b^+b)/(n + 1). \tag{4}$$

Структурная функция $\varphi_n(V_0)$ из (2б) в этом случае имеет вид:

$$\varphi_{n+1}(V_0) = \gamma_n(V_0; R) = (R/(n+1) + 1 - V_0)(nV_0 + R/(n+1))^{(n)},$$ (5)

$$A^{(B)} = A(A-1)(A-2)\dots(A-B+1).$$

В случае, когда в разложения (1) входят вместо V_α генераторы Y_α обычных алгебр Ли g^{ds}, формализм этих алгебр успешно применяется для решения физических задач /5, 6/. В частности, пространства L(H) состояний моделей разбиваются в прямую сумму

$$L(H) = \sum\nolimits_{\otimes} L^D \tag{6}$$

неприводимых относительно g^{ds} подпространств L^D, которые эволюционируют под действием гамильтониана H независимо. Кроме того, линейная зависимость H от Y_α обеспечивает мощную теоретико-групповую технику обобщенных когерентных состояний орбитного типа /6/ или связанный с ней формализм Ли-экспоненциалов Магнуса — Нормана — Уэя /5/ для диагонализации H или нахождения эволюционного оператора $U_H(t, t_0)$ на каждом подпространстве L^D.

Однако для деформированных алгебр Ли g_d представления (1) для гамильтонианов типа (3) обеспечивают лишь разложения типа (6) /1, 2/; в то же время эффективного аналога техники обобщенных когерентных состояний или Ли-экспоненциалов для g_d пока нет, поскольку экспоненцирование алгебр g_d приводит не к группам Ли, а только к квазигруппам /7/, математический аппарат которых пока недостаточно развит. Тем не менее, ниже будет показано, что формализм алгебр $g_d = sl^{\varphi}_d(2)$ обеспечивает определенные конструктивные возможности для решения физических задач с гамильтонианами (1).

Один из путей применения формализма $sl_d(2)$ связан с решеним стационарного уравнения Шредингера

$$H|E\rangle = E|E\rangle \tag{7}$$

с гамильтонианом (1) на неприводимых относительно $sl^{\varphi}_d(2)$ подпространствах $L^D = L^m \subset L(H)$, определяемых младшими весами m и младшими векторами $|m\rangle$: $V_0|m\rangle = m|m\rangle$, $V_-|m\rangle = 0$, где младшие веса m определяются из легко проверяемых для (4), (5) тождеств

$$(V_+V_- \equiv \varphi_n(V_0))\big|_{L(H)}, \tag{8}$$

которые выполняются на модельных пространствах L(H) /1, 2/.

Решения уравнения (7) можно искать с помощью разложений

$$|E\rangle = \sum_r A_r(E) V_+^r |m\rangle, \tag{9}$$

которые обобщают на случай $sl_d(2)$ схему /8/ диагонализации произвольного элемента обычной алгебры Ли $sl(2)$. Подставляя (9) в (7) и используя (2) и тождества вида (8), получим рекуррентные соотношения (разностные уравнения)

$$[(m + r)a + c_m - E]A_r(E) + bA_{r-1}(E) + b^*\varphi_n(m + r + 1)A_{r+1}(E) = 0,$$
$$r = 0, 1, \dots , \tag{10}$$

для коэффициентов $A_r(E)$ (c_m — собственное значение на L^m оператора C из (1)).

Разностные уравнения (10) принадлежат к гипергеометрическому типу /9/ и в случае обычных алгебр Ли, когда полиномы $\varphi_n(x)$ не выше второй степени, их решения выражаются через классические ортогональные полиномы дискретной переменной E /8, 9/. Для деформированных алгебр $sl^{\varphi}_d(2)$ полиномы $\varphi_n(x)$ имеют более высокую степень (ср. (5)), поэтому, следуя аргументам /8/, можно предположить, что в общем случае уравнения (10) определяют новые классы *неклассических* ортогональных полиномов дискретной переменной (вообще говоря, на неравномерных сетках).

Решение уравнений (10) можно осуществлять с помощью стандартного в исчислении конечных разностей /10/ метода производящих функций:

$$U(z; E) = \sum_{rs} A_s(E)z^s. \tag{11}$$

Эти производящие функции $U(z; E)$ очевидным образом связаны с решениями исходного уравнения (7):

$$|E> = U(V_+; E)|m> \tag{12}$$

и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(-am + E - c_m)U(z; E) = [az\partial/\partial z + bz + b^*z^{-1}\varphi_n(z\partial/\partial z + m)]U(z; E), \tag{13}$$

которое получается из (10) с помощью (11) и соотношений /9, 10/:

$$\varphi_n(m + x) = \sum_{s=1}^{n} c_s x^{(s)},\ c_s = \frac{1}{s!}\Delta^s_x \varphi_n(m + x)\Big|_{x=0} = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{s+\sigma}\varphi_n(m+\sigma)}{\sigma!(s-\sigma)!},$$

$$(z\partial/\partial z)^{(s)} = z^s\partial^s/\partial z^s,\ z\partial/\partial z(z^m) = mz^m,$$

и связано с реализацией

$$V_+ = z,\ V_0 = (z\partial/\partial z + m),\ V_- = z^{-1}\varphi_n(z\partial/\partial z + m) = \sum_{s=1}^{n} c_s z^{s-1}\partial^s/\partial z^s$$

генераторов V_α в (1), (7) дифференциальными операторами. Уравнения (13) близки по виду к уравнениям, определяющим обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q\left(\begin{matrix}\{a_i\}\\ ;\ z\\ \{b_j\}\end{matrix}\right)$ непрерывного аргумента z (см. /9/, т. 1, с. 185), и их решения, по-видимому, задают (в силу (7), (11), (12)) новые классы ортогональных функций (полиномов для $sl_d(2) = su_d(2)$ непрерывной переменной z.

Таким образом, использование формализма алгебры $sl_d(2)$ свело решение уравнения (7) с гамильтонианом (1) к решению разностного уравнения (10) или дифференциального уравнения (13) специальных (обобщенных гипергеометрических) типов. Отметим также, что данная выше схема рассуждений позволяет получить нестационарный аналог уравнения (13):

$$i\hbar\,\frac{\partial U(z;\ t)}{\partial t} = [a(\partial/\partial z + m) + c_m + bz + b^* z^{-1}\varphi_n(z\partial/\partial z + m)]\,U(z;\ t)$$

для функции $U(z;\ t)$, определяющей эволюционный оператор $U_H(t;\ t_0) = \check{U}(V_0;\ t)\,U^{-1}(V_0;\ t_0)$, который ассоциирован с гамильтонианом H: $|t\rangle = U_H(t;\ t_0)|t_0\rangle$, $|t_0\rangle = U(V_0;\ t_0)|m\rangle$ — состояние системы в начальный момент.

Другой путь применения формализма $sl_d(2)$ к решению физических задач с гамильтонианом (1) базируется на осуществляемом на L(H) отображении

$$H \to H_D = \bar{a}Y_0 + \bar{b}Y_+ + \bar{b}^*Y_- + \bar{C},\quad [\bar{C},\ Y_\alpha] = 0, \tag{14}$$

гамильтонианов (1) в некоторые "искаженные" гамильтонианы H_D, которые линейны по генераторам Y_α некоторых обычных алгебр Ли $g(H_D)$. Это отображение осуществляется с помощью анзаца

$$Y_0 = f_0(V_0) = \alpha V_0 + \beta I,\quad Y_+ = V_+ f_1(V_0),\quad Y_- = f_1(V_0)V_-, \tag{15}$$

задающего отображение

$$sl_d^{\varphi}(2) \to g(H_D) = \{Y_\pm,\ Y_0:\ [Y_0,\ Y_\pm] = \pm Y_\pm,\ [Y_-,\ Y_+] = f'(Y_0)\} \tag{16}$$

алгебры $sl_d(2)$ в динамическую алгебру гамильтониана H_D с линейной по Y_0 функцией $f'(Y_0) = \bar{f}'(V_0)$. Такого типа отображение впервые было применено для обычных алгебр Ли в работе /11/ при изучении спиновых волн в магнитных структурах и поэтому в случае произвольных Ли-алгебраических структур $g_d(H)$ может быть названо обобщенным отображением Холстейна — Примакова.

Явный вид функций $f_a(V_0)$ в (15) находится из решения разностных уравнений для $F(V_0) = |f_1(V_0)|^2\varphi_n(V_0 + 1)$:

$$F(V_0) - F(V_0 - 1) = \bar{f}'(V_0), \tag{17}$$

которые получаются путем использования (2) в определяющих соотношениях (15) — (16) алгебр Ли $g(H_D)$ (ср. /12/). Так, выбирая в качестве $g(H_D)$ одномерную осцилляторную алгебру /6/ osc(1) $= \{Y_\pm, Y_0, I, [Y_-, Y_+] = I, \ [Y_0, Y_\pm] = \pm Y_\pm, [I, Y_\alpha] = 0\}$, находим из (17):

$$f_0(V_0) = V_0 + \beta I, \quad |f_1(V_0)|^2 = [V_0 + (1 + \beta)I]/\varphi_n(V_0 + I), \tag{18}$$

а для линейных "прототипов" $g(H_D) = \{ Y_+, Y_-, Y_0: [Y_-, Y_+] = \mp 2Y_0, \ [Y_0, Y_\pm] = \pm Y_\pm\} = su(2)$ (или $su(1, 1)$) алгебры $sl_d(2)$ получаем:

$$f_0(V_0) = V_0 + \beta I, \quad |f_1(V_0)|^2 = [\alpha I \mp (V_0 + I + \beta I)^{(2)}]/\varphi_n(V_0 + 1), \tag{19}$$

где константы α, β в (18), (19) определяются из требования "канонического" поведения операторов (15) на экстремальных векторах неприводимых представлений алгебр $g(H_D)$, реализованных на L(H) /12/.

Таким образом, отображения (14) позволяют сопоставить исходным нелинейным задачам с H вида (1) их своеобразные "линеаризованные" версии, управляемые гамильтонианами H_D и допускающие точные решения с помощью Ли-алгебраической техники /5, 6/. Решения таких "линеаризованных" моделей могут быть рассмотрены (при соответствующем выборе $\bar{a}$, $\bar{b}$ в (14) в качестве специфических "сглаженных" аппроксимаций исходных моделей (ср. /11/); в качестве меры близости моделей с гамильтонианами H и H_D можно использовать относительные моменты гамильтонианов

$$\delta_m(H, H_D) = |Tr(H - H_D)^m/Tr(H)^m|, \quad \delta'_m(H, H_D) = |Tr(H_D)^m/Tr(H)^m|,$$

где следы берутся либо по полному пространству L(H), либо по подпространствам $L^D = L^m \subset L(H)$. Полученные приближения можно использовать как "нулевые" для разработок пертурбативных и других итеративных схем решения исходных задач. Однако здесь предстоит проведение дополнительных исследований для конкретизации общей идеи, поскольку гамильтонианы H и H_D, вообще говоря, не коммутируют, хотя и связаны друг с другом через (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасев В. П. Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 9, 31 (1991).
2. Karassiov V. P. Preprints FIAN № 102, № 138, M., 1991.
3. Biedenharn L. C. J. Phys., A22, L873 (1989).

4. П е р и н а Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. М., Мир, 1987.

5. K a r a s s i o v V. P., P r a n t s S. V., P u z y r e v s k y V. I. In: Interaction of electromagnetic field with condensed matter. Singapore: World Scientific, 1990, p. 3.

6. П е р е л о м о в А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

7. K a r a s s i o v V. P. J. Sov. Laser Res., **12**, 147 (1991).

8. B a c r y H. J. Math. Phys., **31**, 2061 (1990).

9. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. т. 1, 2, М., Наука, 1973—1974.

10. Г е л ь ф о н д А. О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967.

11. H o l s t e i n T., P r i m a k o f f H. Phys. Rev., **58**, 1098 (1940).

12. C u r t r i g h t T. L., Z a c h o s C. K. Phys. Lett, **B243**, 237 (1990).

Поступила в редакцию 14 апреля 1992 г.