

## К ТЕОРИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ НА ГРАНИЦЕ СРЕДЫ, ЧЕРЕЗ КОТОРУЮ ДВИЖЕТСЯ БЫСТРАЯ ЗАРЯЖЕННАЯ ЧАСТИЦА

Г. Б. Нерсисян

*Показано, что при движении быстрой заряженной частицы вдоль оси цилиндра, заполненного средой, по границе среды движется волна индуцированного заряда. Полный поверхностный заряд равен заряду частицы. Показано, что граничные эффекты могут уменьшать поляризационные потери частицы.*

Движущаяся в материальной среде быстрая заряженная частица возбуждает сзади за собой колебания плотности заряда /1—3/. Поля таких кильватерных волн, а также связанные с их возбуждением потери энергии частицы широко исследовались для различных сред и особенно для плазмы /3—9/. Было показано, что полный индуцированный кильватерный заряд равен заряду частицы с противоположным знаком. Отсюда следует, что при вхождении частицы в нейтральную среду помимо кильватерного заряда должен индуцироваться еще заряд, равный заряду частицы.

В настоящей работе рассматривается движение частицы по оси бесконечного цилиндра и исследуется не только кильватерный заряд, но также и заряд, индуцированный на поверхности цилиндра. Показано, что сохранение полной нейтральности среды имеет место только при учете эффектов поляризации границы. Помимо этого показано, что индуцированный на поверхности заряд может уменьшать обычные поляризационные (боровские) потери.

Рассмотрим нерелятивистскую частицу с зарядом  $Q$ , движущуюся со скоростью  $v$  по оси цилиндра радиуса  $a$ . Предположим, что обе среды внутри и вне цилиндра обладают только временной дисперсией и их диэлектрические проницаемости равны соответственно  $\epsilon_1(\omega)$  и  $\epsilon_2(\omega)$ . Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  с осью  $z$ , направленной по оси цилиндра. С учетом стационарности задачи в системе координат, связанной с частицей, все величины будем искать в виде разложения в интеграл Фурье по переменной  $\xi = z - vt$ :

$$\varphi(r, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp\left(i \frac{\omega}{v} \xi\right) \varphi(\omega, r).$$

Из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0$ , где  $\rho_0 = Q\delta(z - vt)\delta(r)$ , и условий непрерывности при  $r = a$  нормальной компоненты вектора индукции и тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля найдем для Фурье-компоненты электрического потенциала  $\varphi(\omega, r)$  выражение

(E = - Vφ):

$$\varphi(\omega, r) = \frac{Q}{\pi v \epsilon_1(\omega)} \left[ K_0\left(\frac{\omega}{v} r\right) + \frac{\{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)\} K_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v} a\right)}{\epsilon_1(\omega) I_1\left(\frac{\omega}{v} a\right) K_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) + \epsilon_2(\omega) I_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v} a\right)} I_0\left(\frac{\omega}{v} r\right) \right]; r < a \quad (1)$$

$$\varphi(\omega, r) = \frac{Q}{\pi a \omega} \cdot \frac{1}{\epsilon_1(\omega) I_1\left(\frac{\omega}{v} a\right) K_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) + \epsilon_2(\omega) I_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v} a\right)} K_0\left(\frac{\omega}{v} r\right); r > a,$$

где  $K_n(x)$  и  $I_n(x)$  ( $n = 0, 1$ ) — функции Бесселя от мнимого аргумента. При изменении знака  $\omega$  все выражения переходят в комплексно сопряженные. Первое слагаемое, стоящее в скобках выражения (1), отвечает потенциалу частицы в безграничной среде, а остальные — потенциалу, возникающему из-за границы раздела сред.

Следующее из формул (1) выражение для вектора напряженности электрического поля совпадает с приведенным в /11/, если в последнем перейти к пределу  $v \ll c$ .

С помощью выражения (1) для потенциала найдем плотность поверхностного заряда:

$$\sigma(\xi) \equiv \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{a-0} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{a+0} \right) = \frac{Q}{2\pi^2 v a} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega)} \times \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{v}\xi\right) K_1\left(\frac{\omega}{v}a\right)}{\epsilon_1(\omega) I_1\left(\frac{\omega}{v}a\right) K_0\left(\frac{\omega}{v}a\right) + \epsilon_2(\omega) I_0\left(\frac{\omega}{v}a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v}a\right)} \quad (2)$$

Интегрирование  $\sigma(\xi)$  по всей поверхности цилиндра дает искомый результат для полного индуцированного заряда на поверхности цилиндра:

$$Q_\sigma = 2\pi a \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sigma(\xi) = Q \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\epsilon_2(\omega)} - \frac{1}{\epsilon_1(\omega)} \right]_{\omega \rightarrow 0} \quad (3)$$

Последняя формула получена при допущении, что  $[\omega^q \epsilon_1(\omega) / \epsilon_2(\omega)]_{\omega \rightarrow 0} = \text{const}$ , где  $1 \leq q < 2$ . Используя известное выражение для плотности кильватерного заряда /12/, найдем полный кильватерный заряд в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1(\omega)$ :

$$Q_v = \int d^2r \int_{-\infty}^0 d\xi \rho(r, \xi) = -Q \operatorname{Re} \left[ 1 - \frac{1}{\epsilon_1(\omega)} \right]_{\omega \rightarrow 0}. \quad (4)$$

Как следует из формул (3) и (4), полный индуцированный в цилиндре заряд не зависит от диэлектрических свойств вещества внутри цилиндра и обращается в ноль, когда внешняя среда отсутствует ( $\epsilon_2 = 1$ ).

Наличие поверхностного заряда влияет на потери энергии частицы. Это связано с взаимодействием пробной частицы с электрическим полем поверхностного заряда. Тормозящую частицу силу можно найти в общем случае, используя формулу (1) для потенциала в среде:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_0}{dz} + \frac{2Q^2}{\pi v^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega)} \times$$

$$\frac{\omega K_0\left(\frac{\omega}{v}a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v}a\right)}{\epsilon_1(\omega) I_1\left(\frac{\omega}{v}a\right) K_0\left(\frac{\omega}{v}a\right) + \epsilon_2(\omega) I_0\left(\frac{\omega}{v}a\right) K_1\left(\frac{\omega}{v}a\right)}, \quad (5)$$

где  $\frac{dW_0}{dz}$  — обычные боровские потери энергии в безграничной среде /10/,

$$\frac{dW_0}{dz} = \frac{2Q^2}{\pi v^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{\epsilon_1(\omega)} K_0\left(\frac{\omega}{v}r_0\right).$$

Величина  $r_0$  есть то минимальное допустимое в классической электродинамике среды расстояние до частицы, при котором еще справедливо классическое рассмотрение. В пределе  $v \ll c$  и при пренебрежении магнитными свойствами сред выражение (5) совпадает с формулой (III. 17) из работы /11/.

Исследование электрического потенциала и индуцированного заряда возможно только в том случае, если известны функции  $\epsilon_{1,2}(\omega)$ . Для пробной частицы, скорость которой  $v$  велика по сравнению со средними скоростями электронов среды  $v_f$ , широко используется /4/ плазменная диэлектрическая проницаемость:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (6)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота электронов среды,  $\nu$  — эффективная частота столкновений электронов

( $\nu \ll \omega_p$ ). Если внешняя среда отсутствует ( $\epsilon_2 = 1$ ), а диэлектрические свойства среды внутри цилиндра определяются формулой (6) ( $\epsilon_1 = \epsilon(\omega)$ ), то для электрического потенциала находим:

$$\begin{aligned} \Phi \equiv (Qk_p)^{-1} \varphi(r, \xi) = (Qk_p)^{-1} \varphi_0(r, \xi) - \\ - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} ds \exp\left(-s \frac{|\xi|}{a}\right) J_0\left(s \frac{r}{a}\right) \frac{s^2}{s^2 + x^2} \cdot \frac{J_1^2(s) N_0(s) + \frac{4s}{\pi x^2} J_1(s) Y_0(s) - \frac{4}{\pi^2 x^2}}{J_1^2(s) N_0(s) + \frac{4s}{\pi x^2} J_1(s) Y_0(s) + \frac{4s^2}{\pi^2 x^4}} + \\ + 2\theta(-\xi) \left[ \frac{d}{dx} \{x\mu(x)\} \frac{K_0(x\mu)}{I_0(x\mu)} I_0(\mu k_p r) \exp(\eta_s \xi) \sin(\mu k_p \xi) - \frac{K_0(x)}{I_0(x)} I_0(k_p r) \exp(\eta_p \xi) \sin(k_p \xi) \right]; \\ r < a, \\ \frac{1}{k_p \sqrt{r^2 + \xi^2}} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} ds \exp\left(-s \frac{|\xi|}{a}\right) J_1(s) \times \\ \times \frac{\frac{2s}{\pi x^2} \left[ J_0\left(s \frac{r}{a}\right) Y_0(s) + J_0(s) Y_0\left(s \frac{r}{a}\right) \right] + J_0\left(s \frac{r}{a}\right) J_1(s) N_0(s)}{J_1^2(s) N_0(s) + \frac{4s}{\pi x^2} J_1(s) Y_0(s) + \frac{4s^2}{\pi^2 x^4}} + \\ + 2\theta(-\xi) \frac{d}{dx} \{x\mu(x)\} \exp(\eta_s \xi) \sin(\mu k_p \xi) K_0(\mu k_p r); r > a, \end{aligned}$$

где  $\varphi_0(r, \xi)$  — потенциал в безграничной холодной плазме [3/

$$(Qk_p)^{-1} \varphi_0(r, \xi) = \int_0^{\infty} \frac{s^2 \exp(-sk_p |\xi|)}{1 + s^2} J_0(sk_p r) ds + 2\theta(-\xi) \exp(\eta_p \xi) K_0(k_p r) \sin(k_p \xi),$$

а  $J_n(s)$ ,  $Y_n(s)$ ,  $N_n(s) \equiv J_n^2(s) + Y_n^2(s)$  ( $n = 0; 1$ ),  $\theta(s)$  — соответственно функции Бесселя, Неймана, Никольсона и Хевисайда. Приняты следующие обозначения:  $\eta_p = \nu/2\nu$ ,  $k_p = \omega_p/\nu$ ,  $x = k_p a$ ,  $\mu(x) \equiv \omega_s(a)/\omega_p$ , где  $\omega_s$  — частота поверхностных колебаний, являющаяся действительной частью решения дисперсионного уравнения, которому отвечает равенство нулю знаменателя формулы (1). Мнимая часть решения определяет декремент затухания поверхностных колебаний и обозначена  $\eta_s \nu$ . Для плазмы дисперсионное уравнение для поверхностных колебаний имеет следующий вид:

$$\mu(x) = xI_1(x\mu)K_0(x\mu).$$

Решение можно найти в явном виде в двух предельных случаях:  $\mu(x) = 1/\sqrt{2} - 1/4x$  при  $x \gg 1$  и  $\mu(x) = (2/\beta x)\exp(-2/x^2)$  при  $x \ll 1$  где  $\beta = 1,78$  — постоянная Эйлера. Зависимость  $\mu$  от  $x$  показана на рис. 1а.

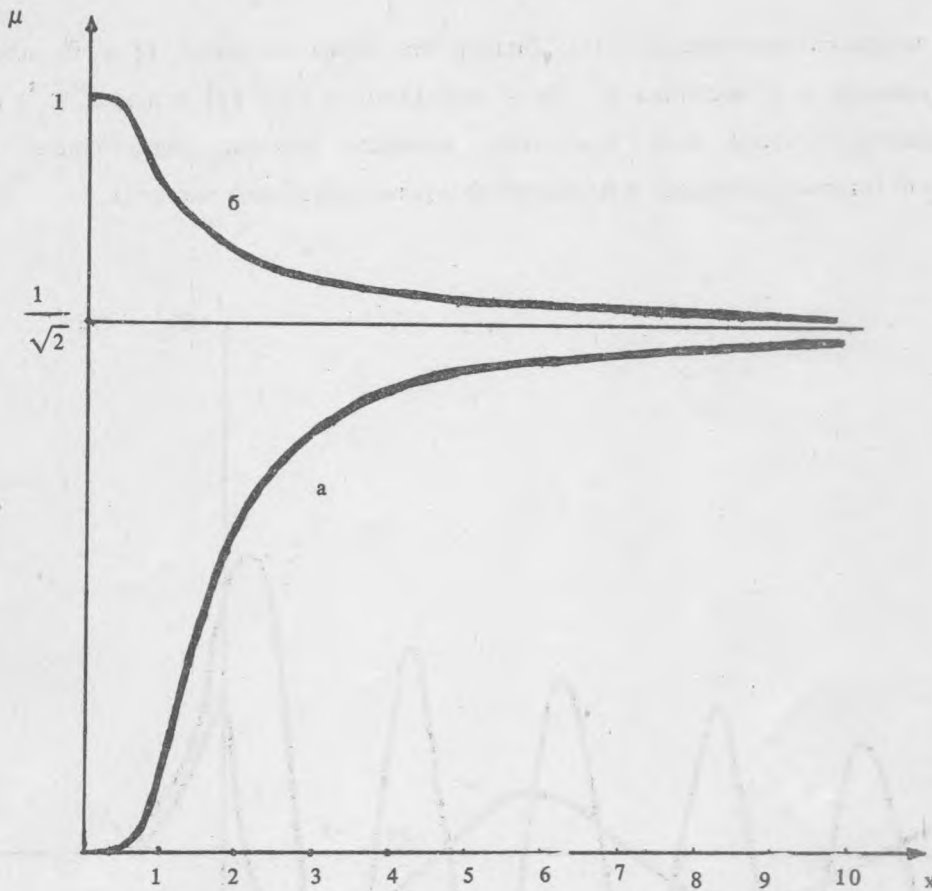


Рис. 1. Графики зависимости  $\mu(x)$  для  $\epsilon_2 = 1$ ;  $\epsilon_1 \equiv \epsilon(\omega)$  (а) и  $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ ;  $\epsilon_1 = 1$  (б).

Подставляя в формулу (2)  $\epsilon_2 = 1$  и  $\epsilon_1 = \epsilon(\omega)$ , найдем плотность поверхностного заряда:

$$\begin{aligned}
 (Qk_p^2)^{-1} \sigma(\xi) = & \frac{1}{\pi^3 x^4} \int_0^{\infty} ds \exp\left(-s \frac{|\xi|}{a}\right) \cdot \frac{s J_1(s)}{J_1^2(s) N_0(s) + \frac{4s}{\pi x^2} J_1(s) Y_0(s) + \frac{4s^2}{\pi^2 x^4}} + \\
 & + \frac{\theta(-\xi)}{2\pi x} \left[ \frac{d}{dx} \{x\mu(x)\} \frac{1}{I_0(x\mu)} \exp(\eta_s \xi) \sin(\mu k_p \xi) - \frac{1}{I_0(x)} \exp(\eta_p \xi) \sin(k_p \xi) \right].
 \end{aligned}$$

На рис. 2 показана зависимость  $\sigma(\xi)$ . Видно, что перед частицей ( $\xi > 0$ ) плотность заряда монотонно убывает, а за частицей ( $\xi < 0$ ) — осциллирует. При  $|\xi| \gg \max(a, k_p^{-1})$  выражение для  $\sigma(\xi)$  представляет сумму двух слагаемых, которым отвечают затухающие колебания на поверхностной (второе слагаемое) и плазменной (третье слагаемое) частотах.

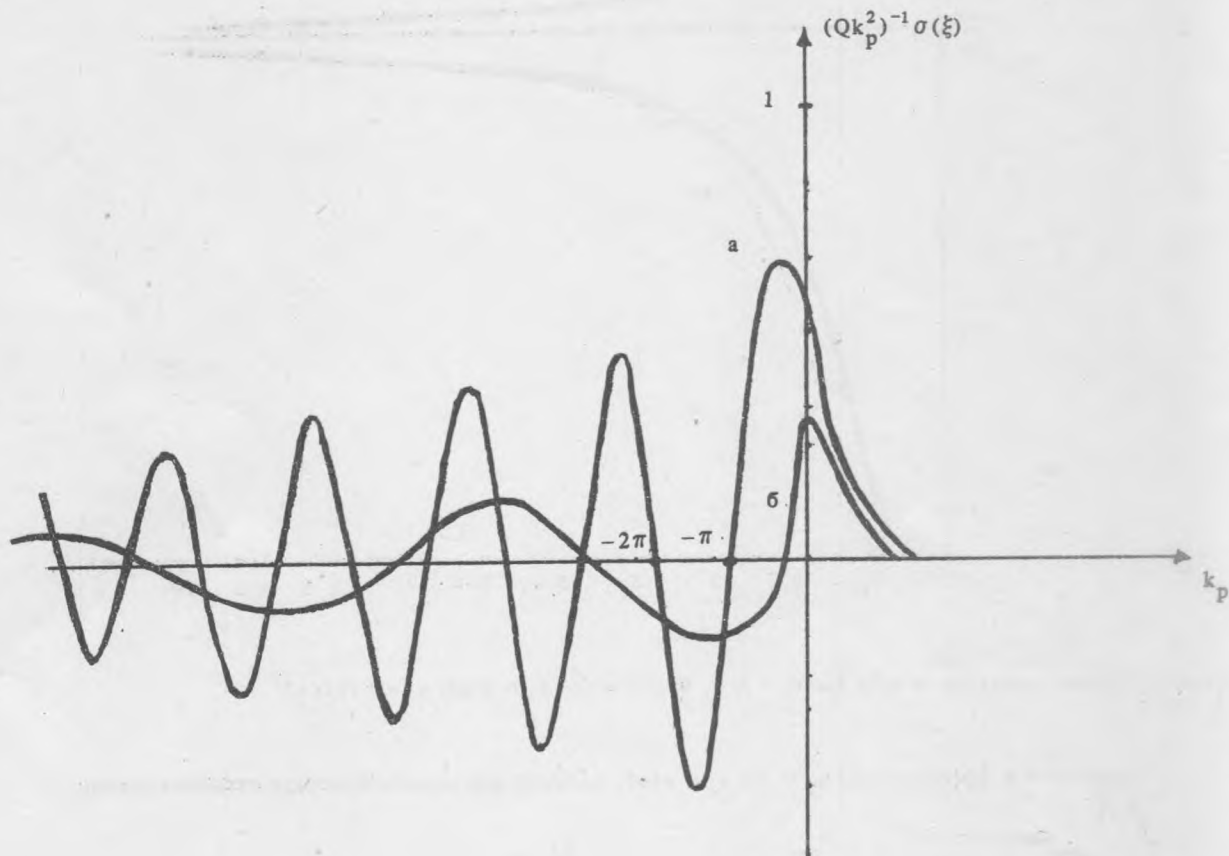


Рис. 2. Зависимость  $\sigma(\xi)$  для значений  $x = 0,5$  (а) и  $x = 7$  (б).

Индукцированный на поверхности плазмы заряд вызывает дополнительные (помимо боровских) потери энергии, которые определяются с помощью формулы (6):

$$(Qk_p)^{-2} \left[ \frac{dW}{dz} - \frac{dW_0}{dz} \right] = \frac{K_0(x)}{I_0(x)} - \mu(x) \frac{d}{dx} \{x\mu(x)\} \frac{K_0(x\mu)}{I_0(x\mu)}. \quad (7)$$

В двух предельных случаях выражение (7) принимает вид:  $-(\pi/2)\exp(-x\sqrt{2}) < 0$ , при  $x \gg 1$ ;  $\ln(2/\beta x) > 0$  при  $x \ll 1$ . При увеличении радиуса цилиндра стоящие справа в формуле (7) слагаемые стремятся к нулю как  $\exp(-2\omega_p a/v)$  и  $\exp(-\sqrt{2}\omega_p a/v)$  и потери энергии становятся такими же, как и в безграничной плазме. Поэтому по отношению к потерям среду можно считать безграничной уже при радиусе цилиндра порядка или больше  $v/\omega_p$ .

Правая часть формулы (7) положительна при  $a < v/\omega_p$  и в этом предельном случае наличие границ уменьшает боровские потери.

Если частица движется по оси пустого канала в плазме ( $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$ ), то кильватерный заряд отсутствует и  $Q_\sigma = -Q$ . Поверхностный заряд вызывает торможение частицы, и соответствующую силу можно найти с помощью выражения (6):

$$(Qk_p)^{-2} \frac{dW}{dz} = -x^3 \frac{d}{dx} \{x\mu(x)\} K_0(x\mu) K_1(x\mu) < 0,$$

где теперь  $\mu(x)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению  $\mu = xI_0(x\mu)K_1(x\mu)$  и принимает следующий вид для двух предельных значений  $x$ :  $\mu(x) = 1/\sqrt{2} + 1/4x$ , при  $x \gg 1$ ;  $\mu(x) = 1 - (x^2/4)\ln(2/x\sqrt{e})$ , при  $x \ll 1$ . Зависимость  $\mu$  от  $x$  показана на рис. 1б. На наличие поляризационных потерь при движении заряда вдоль пустого канала в веществе впервые указал Я. Б. Файнберг.

Таким образом, при движении частицы по оси плазменного цилиндра, находящегося в вакууме, на его поверхности индуцируется движущийся поверхностный заряд. Он компенсирует кильватерный заряд, индуцированный в объеме среды, и при малом радиусе цилиндра ( $a < v/\omega_p$ ) уменьшает боровские потери.

Автор благодарен Л. М. Горбунову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr N. K. Dan. Vidensk. Selsk., Mat. — Fys. Medd., **18**, 1 (1948).
2. Pines D. Phys. Rev., **92**, 626 (1953).
3. Neuffeld J., Ritchie R. H. Phys. Rev., **98**, 1632 (1955); **99**, 1125 (1955).
4. Neelavathi V. N., Ritchie R. H., Brandt W. Phys. Rev. Lett., **33**, 302 (1974).

5. Vager Z., Gemmel D. S. Phys. Rev. Lett., 37, 1352 (1976).
6. Wang C. L., Joyce G., Nicholson D. R. J. Plasma Phys., 25, 225 (1981).
7. Chenevier P., Dolique J. M., Peres H. J. Plasma Phys., 10, 185 (1973).
8. Laing E. W., Lamont A., Fielding P. J. J. Plasma Phys., 5, 441 (1971).
9. Chen L., Langdon A. B., Lieberman M. A. J. Plasma Phys., 9, 311 (1973).
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
11. Болотовский Б. М. УФН, LXXV, вып. 2, 295 (1961).
12. Рязанов М. И. Электродинамика конденсированного вещества. М., Наука, 1984.

Поступила в редакцию 8 мая 1992 г.